Victor Florin POTERAŞU

Nicolae FLOREA

PRACTICA OPTIMIZĂRII STRUCTURILOR

JUNIMEA

Scanned with OKEN Scanner

VICTOR-FLORIN POTERAȘU

NICOLAE FLOREA

PRACTICA OPTIMIZĂRII STRUCTURILOR

JUNIMEA

IAȘI ● 1984

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

1. INTRODUCERE

1.1. Proiectarea în sens sistemic

O examinare a procesului de proiectare a structurilor în ansamblul lor permite evidențierea faptului că acesta se bazează în mod esențial pe metodele teoriei sistemelor. Procedeele de proiectare a structurilor sînt prin natura lor iterative, însă iterațiile apar mai curînd în modul de analiză a problemei de proiectare și nu sînt inerente proiectării. Printr-o definire corespunzătoare a problemei de proiectare se poate arăta că multe din procesele iterative ale diverselor proceduri de proiectare ale structurilor pot fi eliminate dacă accentul cade pe o abordare sintetică. În general o structură va fi sintetizată într-un sens optim dacă optimizarea a fost efectuată în raport cu un criteriu dedus sau impus (adesea subiectiv).

Logica evoluției proiectării poate fi în mod convenabil divizată în șase stadii: definirea problemei, definirea valorii sistemului, generarea sistemului, evaluarea sistemului, selecția și acțiunea. Concepînd o construcție prin acest model sistemic rațional fiecare stadiu are o perspectivă clară și corectă. Conexiunea inversă poate apare între stadii în cursul efortului de a rafina problema la oricare dintre acestea iar o suprapunere parțială sau o fuziune poate exista între stadiile succesive. Exprimată în termeni sistemici, noțiunea convențională de „proiectare structurală" fiind o fază a procesului general de proiectare este o operație în buclă închisă a unei modificări iterative avînd conexiune inversă (feedback) la stadiul analizat (reprezentat prin linii pline în fig. 1.1).

Punctele terminale ale buclei ciclului a respectiv b sînt următoarele:

a) *inițial*, un sistem postulat, extrapolat din experiență sau bazat pe o idee (al treilea stadiu al procesului general de proiectare),

b) *final*, satisfacerea unei performanțe specificate (al cincilea stadiu al procesului general de proiectare).

Pe scurt, proiectarea convențională este un proces de optimizare a procedeului de tatonare.

Pentru multe structuri stadiul generării sistemului este rutinier iar relațiile între subsisteme sînt definite de diversele mecanici. Sistemele sînt obișnuit împărțite în subsisteme de nivel inferior capabile să formeze un model tratabil și o subproblemă de proiectare tratabilă, deși o anumită inconsistență în procedeul de modelare este de notat.

În particular există o interdependență la fiecare nivel și se cere o înțelegere la nivelul superior atunci cînd se proiectează la un subsistem de nivel inferior. Introducerea unei serii de subprobleme de proiectare creează alte iterații în pro-

cesul de proiectare (ce sînt iar introduse în studiul bazat pe analiză). Această iterație nu este inerentă sistemului.

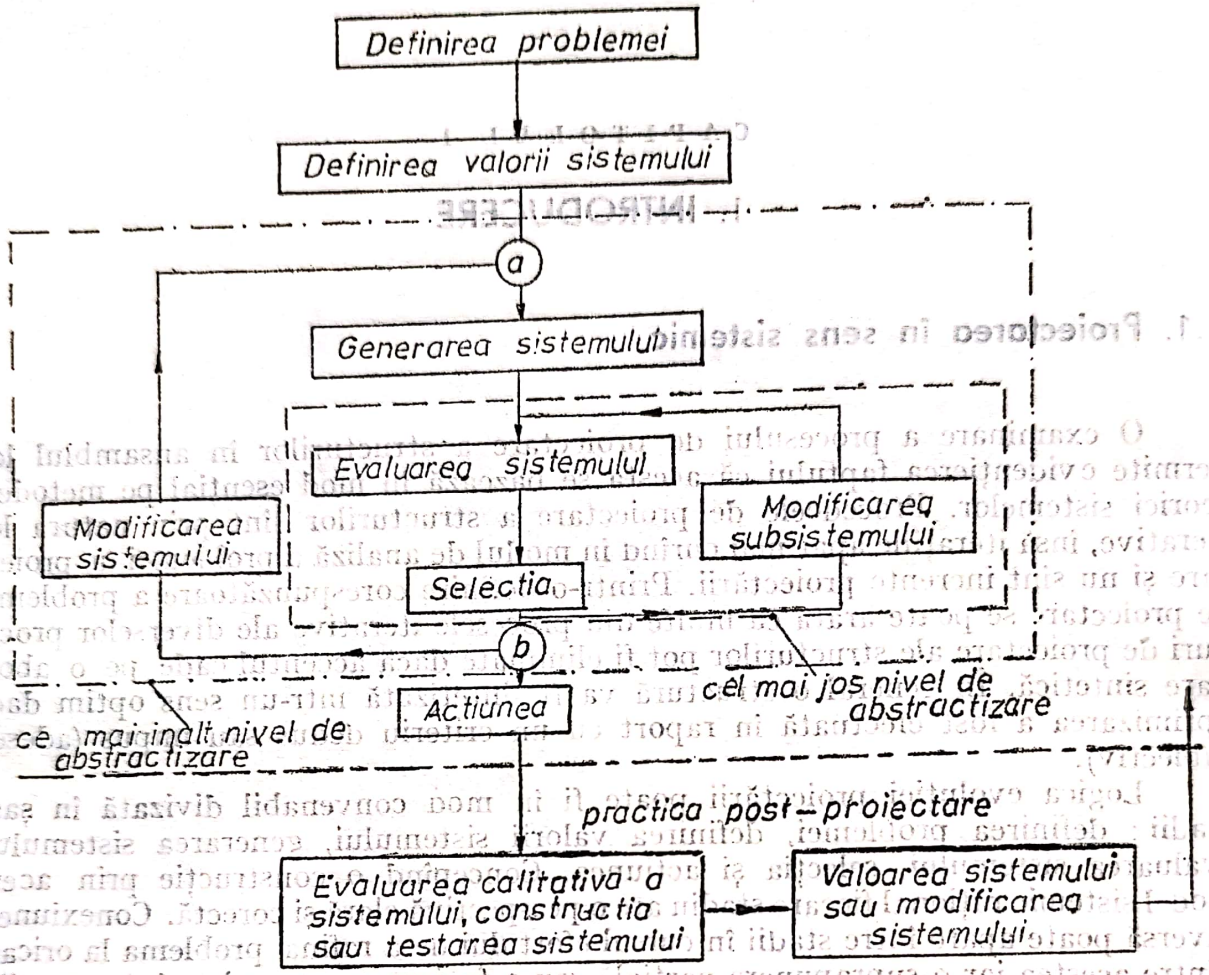


Fig. 1.1

Natura iterativă poate fi partea mobilă a procesului de proiectare, dacă pentru cerințe specificate de proiectare, sistemul este sintetizat direct, cuvîntul operativ fiind direct. Diferența esențială între procedeul bazat pe analiză și cel bazat pe sinteză constă în nivelul de abstractizare adoptat în calcul. (Terminologia „nivel de abstractizare este folosită în sensul legării cantității de datele presupuse apriori). Tehnicile bazate pe analiză impun o configurație generală sistemului ab initio, în timp ce sistemul decurge dintr-un nivel dat de abstractizare ca o consecință naturală a tratării directe sintetice. Alegerea nivelului de abstractizare pe care proiectantul îl alege, balansează între raționamentul său inginerese și modalitatea de calcul dorită. O tratare de tip sinteză poate exista atunci cînd anumite proprietăți ale sistemului rămîn libere și ajustabile. Este aparent că un format de tip sinteză al proiectării este fundamental și în același timp cea mai rațională abordare.

În articolele tehnice uzuale studiile de tip sintetic sînt legate de instrumentul de proiectare și nu de proiectarea însăși. Aceasta presupune că proiectarea a fost deja efectuată (sau aleasă) și există un model matematic corespunzător pentru clasa de structuri considerată.

1.2. Obiectul optimizării

Spre deosebire de elementele neportante, care se alcătuiesc din condiții constructive, funcționale, tehnologice, estetice etc., proiectarea unei structuri de rezistență comportă calcule riguroase, deoarece este necesar să fie satisfăcute anumite criterii tehnice și economice.

Criteriile tehnice conduc la stabilirea soluțiilor constructive ce asigură structurii rezistență și stabilitate în exploatare.

Ele s-au bucurat în trecut de o mare atenție din partea specialiștilor, în timp ce criteriile economice, fără a fi neglijate total, vizau doar unele aspecte secundare.

În prezent se consideră că o soluție rațională poate fi obținută numai dacă se ține cont în egală măsură de multitudinea factorilor ce o condiționează, atitudine ce impune îmbinarea armonioasă a celor două tipuri de criterii.

Studiile întreprinse în ultimul timp au demonstrat că atașînd metodelor de calcul static sau de dimensionare relații matematice ce exprimă diverse aspecte economice, se pot obține sisteme constructive cu eficiență sporită.

Deși rezolvarea strict matematică a problemei de optimizare constituie calea mai indicată, oferind avantaje remarcabile, o astfel de abordare nu este totdeauna accesibilă în cazul proiectării construcțiilor, deoarece comportă luarea în considerare a numeroși factori obiectivi și subiectivi.

Aceștia intervin cu ponderi diferite în funcție de conjunctura în care se găsește sistemul economic, unii din ei prezentînd caracteristici și influențe contradictorii.

Astfel, condițiile estetice, de confort, de exploatare sau întreținere se opun de regulă unor cerințe tehnice și economice cum ar fi : metodele și ritmul de execuție, durata, costul etc.

Din acest motiv sînt acceptate și metode mai puțin riguroase, pentru care nu există suficiente argumente de convergență sau, nu este demonstrat faptul că se obține extremul global.

Deoarece nu se cunosc încă direcțiile de dezvoltare și formele concrete pe care le vor lua aceste metode în viitor, în etapa actuală este pe deplin justificată orice încercare de a proiecta cît mai rațional, chiar dacă se folosesc modele matematice simplificate.

Nefiind posibil să se efectueze deocamdată o optimizare de ansamblu, care să conducă la o soluție generală, capabilă să satisfacă multitudinea de aspecte și cerințe existente, cercetările ce se întreprind în acest sens vizează doar unele domenii mai importante cum ar fi: conformarea și alcătuirea structurilor de rezistență, aspecte tehnologice, economice etc.

Dat fiind dificultățile deosebite ce se ivesc, devine tot mai răspîndită opinia, potrivit căreia, cea mai indicată cale o constituie rezolvarea problemei de optimizare în mod etapizat.

Metodologiile elaborate pe baza acestui principiu analizează în cadrul fiecărei etape doar unele caracteristici ale sistemului.

Astfel, într-o primă fază, se găsește soluția optimă a structurii luînd în considerare variația elementelor geometrice ce o definesc, cum sînt : numărul și mărimea deschiderilor și a travee lor, relații între deschiderea și înălțime etc.

Extinzînd analiza la nivelul fiecărui element, rezultă noi posibilități de a obține economii de material prin schimbarea modului său de alcătuire.

Studiul secțiunii, care se finalizează prin stabilirea dimensiunilor și a cantității de armătură optimă, constituie ultima dar, în același timp, una din cele mai importante etape ale procesului de proiectare.

Din considerente practice, pentru a urgenta aflarea soluției, de regulă, se procedează la fixarea prealabilă a configurației structurii și a parametrilor săi caracteristici, rămînînd de optimizat numai distribuția materialului pe secțiune și în lungul elementului.

Cercetările întreprinse cu scopul de a aplica criterii economice la dimensionarea betonului armat sînt concretizate în numeroase publicații și ele pornesc în principiu de la ideea minimizării greutății proprii sau a obținerii unor cheltuieli de producție cît mai reduse.

Problema este abordată pentru diverse solicitări și moduri de acțiune a încărcărilor, iar rezultatele obținute pot fi considerate satisfăcătoare în etapa actuală.

Betonul precomprimat cunoaște în prezent o dezvoltare continuă și rapidă în cele mai diverse domenii ale construcțiilor, această tendință găsindu-și explicația în creșterea permanentă a gamei problemelor tehnice pe care le poate soluționa în condiții superioare comparativ cu alte materiale de construcție.

Optimizarea calculului elementelor și structurilor din beton precomprimat reprezintă un domeniu de cercetare care s-a bucurat de puțină atenție din partea specialiștilor, situație ce poate fi justificată parțial prin numărul ridicat și diversitatea parametrilor ce condiționează proiectarea și realizarea acestora.

Dimensionarea betonului precomprimat constituie un proces complex, iar parcurgerea lui ridică și o serie de dificultăți datorită neomogenității structurale a materialului.

Astfel, este necesar să se stabilească proporția optimă dintre armătură și beton și întrucît există o stare artificială de tensiuni, trebuie precizată valoarea optimă a eforturilor unitare introduse.

Variația în timp a intensității tensiunilor din precomprimare imprimă sistemelor constructive anumite particularități de calcul ce sporesc dificultățile de soluționare a problemei.

Pentru a ușura această operație, în formularea modelului matematic se recurge la schematizarea situațiilor reale prin introducerea unor ipoteze simplificatoare care au un caracter acoperitor.

Din acest motiv, în lucrările publicate se fac referiri mai ales la materiale omogene, ideal elastice sau plastice, se preferă secțiunile simetrice, optimizarea se face pe baza unui singur criteriu, se neglijează efectul forței tăietoare.

Studiile privind dimensionarea optimă a elementelor din beton precomprimat se referă în special la grinda cu inimă plină în formă de I și la sistemele constructive ce pot fi asimilate în calcul cu aceasta (chesoane, fîșii cu goluri, elemente T, I, II, □), elemente folosite pe scară largă la alcătuirea structurilor de rezistență pentru clădiri industriale și social-culturale.

Optimizarea dimensionării unor astfel de elemente prezintă importanță teoretică și practică deosebită. Reducerea consumurilor de materiale, ca urmare a stabilirii celei mai economice soluții de alcătuire, pentru un număr însemnat de sisteme constructive, conduce nemijlocit la micșorarea costului și a greutății proprii a construcțiilor.

O parte din studiile efectuate pînă în prezent și-au găsit aplicarea imediată în practică, ca urmare a faptului că au fost finalizate sub formă de algoritmi și programe de calcul.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece utilizarea elementelor cu armătură preîntinsă a evidențiat o serie de avantaje tehnologice și economice comparativ cu alte procedee de precomprimare, ele sînt solicitate cu precădere în industria construcțiilor.

În cadrul lucrării sînt abordate probleme specifice acestui procedeu de realizare a elementelor precomprimate.

Obiectul de studiu l-a constituit grinda cu inimă plină acționată de încărcări uniform distribuite, rezemată la extremități și avînd secțiunea constantă în lungul elementului.

1.3. Criterii de optimizare

Proiectarea optimă a elementelor de construcție prezintă aspecte numeroase și variate datorită numărului mare de parametri care concură la realizarea și exploatarea acestora.

Problemele de optimizare își găsesc aplicație numai în cadrul fenomenelor bine cunoscute și cu un model matematic ce poate fi stabilit cu precizie. Ele sînt strîns legate de satisfacerea unui anumit criteriu de performanță.

Cele mai generale criterii prezentate în literatura de specialitate sînt :

a) criteriul unei caracteristici maxime sau minime ;

b) criterii economice ;

c) criteriul eficienței exploatării maxime.

a) Drept criteriu extrem al unei anumite caracteristici se poate considera greutatea sau volumul minim care conduc la cele mai reduse consumuri de materiale ; rigiditatea maximă la diferite solicitări în sensul distribuirii materialului, astfel încît deformațiile sistemului să rezulte minime ; energie potențială minimă pe ansamblul structurii ; fiabilitate maximă ; frecvență proprie de vibrație minimă etc.

Atunci cînd cantitatea de material constituie elementul esențial în aprecierea performanțelor unei structuri, criteriul capătă forma simplă a condiției de greutate minimă.

Dacă calculul se face în domeniul elastic, construcția de greutate minimă se determină de regulă în ipoteza că eforturile unitare nu depășesc valorile admisibile.

Este posibil ca structura de greutate minimă să se afle pornindu-se de la schema de rupere în starea de echilibru limită ce precede cedarea plastică, situație în care soluția economică se obține mai simplu decît în primul caz.

b) Cu rare excepții, cînd criteriul rezultă implicit din însăși funcționalitatea clădirii (de exemplu : rigiditatea maximă pentru o structură la care limitarea deformațiilor este esențială), criteriul trebuie să reprezinte o măsură a eficienței economice.

Aceasta reflectă cu ajutorul unor indicatori specifici, modul în care crește masa valorilor și a valorilor de întrebuințare atunci cînd volumul de muncă socialmente necesar rămîne constant sau scade, ea reprezentînd în esență raportul dintre efortul economic și efectele ce decurg dintr-o activitate economică.

Factorii cei mai importanți care condiționează eficiența unei investiții sînt : specificul și caracteristicile procesului tehnologic, particularitățile soluției constructive, modul de realizare a obiectivului, gradul de confort etc.

Criteriile de apreciere a eficienței economice în construcții sînt multiple, fiecare putînd conduce la un optim diferit în raport cu același parametru.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, gradul de industrializare, durata de execuție, consumurile de materiale și manoperă, durata de recuperare a investiției etc., caracterizează suficient de bine eficiența unei investiții, deoarece îmbunătățirea continuă a acestora poate conduce la obținerea unor efecte utile maxime cu un efort economic minim.

Decizia de alegere a soluției optime în proiectare, deci implicit și stabilirea unei priorități a criteriilor, diferă de la o perioadă la alta, fiind funcție de conjunctura în care se află sistemul economic analizat.

Optimizarea pe baza unor criterii economice constituie un proces cu implicații și conexiuni multiple, care trebuie să țină cont de totalitatea aspectelor ce definesc fenomenul economic. În caz contrar, concluziile la care se ajunge pot fi eronate. Astfel, apar situații cînd o construcție este optimă pe baza unui anumit criteriu, dar, în corelație cu alți indicatori, ea nu prezintă maximum de eficiență.

Urmărind realizarea unei structuri cu greutate proprie minimă, se ajunge la procente de armare ridicate, deci consumuri mari de oțel, ceea ce înseamnă o soluție neeficientă.

Deși o clădire de beton armat, executată din elemente prefabricate prezintă consumuri ridicate pentru unele materiale (ciment, oțel), această soluție este de regulă preferată variantei monolite, atunci cînd se iau în considerare și alte aspecte, cum ar fi: durata de execuție, necesarul de manoperă, de cofraj etc.

Un criteriu sintetic folosit pe scară largă în practica de optimizare îl constituie costul.

Acesta necesită luarea în considerare a numeroși parametri, întrucît cheltuielile efectuate pentru realizarea unei construcții nu depind numai de cantitatea de material, ci și de specificul și totalitatea operațiilor de prelucrare, transport și montare a elementelor componente, de alcătuire, de cheltuielile de exploatare și întreținere etc. Utilizarea în practică a acestui criteriu este posibilă dacă se renunță la o serie de influențe neesențiale și se ține cont numai de elementele esențiale.

În ultimul timp se manifestă tendința de a folosi criterii noi de apreciere a eficienței economice, care iau în considerare atît partea funcțională, cît și cea utilitară a obiectivelor, dar a căror exprimare valorică implică dificultăți sporite.

c) Criteriile privind eficiența exploatării își găsesc o sferă restrînsă de aplicații în proiectarea construcțiilor. Ele se folosesc curent în cazul structurilor aerospațiale pentru care se admit costuri inițiale sporite în scopul de a se obține o reducere a greutății și în consecință o micșorare a cheltuielilor de exploatare.

Deoarece alegerea criteriului depinde de o multitudine de condiții pe care trebuie să le îndeplinească construcția, oricare dintre criterii putînd avea o influență hotărîtoare asupra rezultatului final, deocamdată nu există un principiu de optimizare absolut, care să fie valabil în toate situațiile.

Pentru activitatea de proiectare în construcții, criteriile de optimizare decurg din directivele și documentele de partid și de stat ce vizează dezvoltarea economică a țării și se referă în special la reducerea consumurilor de ciment și oțel, la reducerea prețului de deviz și a consumului de muncă, la reducerea duratei de execuție.

1.4. Formularea matematică a problemei de optimizare

Dezvoltarea fără precedent a mijloacelor de calcul în ultimii 25 de ani a condus la progrese considerabile ale proiectării optime în toate disciplinele inginerești.

Scanned with OKEN Scanner

O importanță particulară o reprezintă metoda elementelor finite, metoda elementelor de frontieră și teoria controlului optimal aplicate teoriei structurilor și mecanicii mediilor continui. Metoda elementelor finite este o urmare a perfecționării tehnicii de calcul matricial în rezolvarea ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare și neliniare, a metodelor de analiză a valorilor proprii și a algoritmilor de calcul numeric.

Metoda elementelor de frontieră rezidă din dezvoltarea tehnicii ecuațiilor integrale, a teoriei distribuțiilor și a funcțiilor de influență Green.

Dezvoltarea tehnicilor de programare matematică a condus la un progres major în aplicarea metodelor de optimizare în proiectarea inginerească. În 1960 Schmit a propus cuplarea metodei elementelor finite cu metodele de programare matematică, iar în 1982 Futagami la al IX-lea Simpozion International de programare matematică de la Bonn cuplează metoda elementelor finite cu metoda elementelor de frontieră, cu metoda programării dinamice și programarea liniară. Tot în 1982 la a 4-a Conferință Internațională asupra metodei elementelor de frontieră în inginerie de la Southampton, G. Maier și G. Novati propun cuplarea metodei elementelor de frontieră cu metoda programării liniare iar K. Tanaka propune încă din 1980 studiul problemelor de optimizare a structurilor cu metoda elementelor de frontieră. În recenta sa carte din 1981 ca și într-o serie de articole anterioare D. G. Carmichael introduce sistematic conceptele teoriei sistemelor dezvoltate cu precădere în electrotehnică și automatică la problemele optimizării structurilor.

Obiectivul principal în formularea problemelor de programare îl constituie o anumită funcție matematică $F(x)$, denumită *funcție scop, funcție de performanță* sau *funcție obiectiv* care exprimă sintetic aspectul studiat.

Esența procesului de optimizare constă în aflarea extremelor funcției obiectiv, astfel încît să fie satisfăcute o serie de condiții rezultate din considerarea a diferite situații limită cum ar fi : resurse alocate, cerințe de performanță, diverse restricții de natură fizică, geometrică etc.

Formal, nu există nici o deosebire între minimizarea și maximizarea unei funcții, deoarece minimul lui $F(x)$ este atins pentru maximul lui $-F(x)$.

Condițiile în care se desfășoară fenomenul analizat determină un sistem de relații (ecuații sau inecuații) ce alcătuiesc restricțiile problemei și se referă la variabilele și coeficienții tehnici ce caracterizează fenomenul.

Variabilele, funcția obiectiv și *restricțiile* conduc la formularea modelului matematic, acesta reprezentînd transpunerea într-un limbaj specific a problemei abordate.

Variabilele sînt mărimi independente care descriu anumite aspecte specifice problemei, cum ar fi : configurația structurală, proprietățile fizico-mecanice ale materialelor etc.

Între diferite clase de variabile există o anumită ierarhizare. Astfel, în cazul structurilor de rezistență, cea mai simplă clasă este constituită din variabile ce definesc caracteristicile geometrice sau tehnice ale elementelor componente.

O clasă superioară o reprezintă variabilele ce se referă la configurația structurii (mărimea și numărul de deschideri, raportul dintre înălțime și deschidere etc.).

Clasa cea mai ridicată este formată din variabilele ce determină particularitățile materialului.

Variabilele problemei și implicit rezultatele proiectării optime se prezintă sub forma unui vector :

Scanned with OKEN Scanner

$$X=\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\} \tag{1.1}$$

ale cărui componente sînt mărimi constructive, tehnologice, economice etc.

În procesul de optimizare se urmărește atît alcătuirea de ansamblu a construcției, cît și dimensionarea elementelor ce o compun. Pentru a ușura formularea și rezolvarea problemei, care în cazul general comportă un număr ridicat de variabile, de regulă se recurge la fixarea în prealabil a parametrilor ce definesc structura de rezistență.

Rămîne de optimizat numai distribuirea materialului în elementele componente. În această situație, ca variabile independente se consideră dimensiunile secțiunilor transversale sau anumite caracteristici ale acestora (I_b, A_b, M_p).

Parametrii pot varia în mod continuu sau prin valori discrete, ceea ce conduce la un număr infinit, respectiv finit de combinații posibile.

Cunoașterea acestui aspect prezintă importanță practică, deoarece existența elementelor standardizate și tipizate, precum și anumite considerații constructive, elimină variația continuă a parametrilor și creează posibilitatea de a preciza și restrînge numărul combinațiilor posibile.

Funcția obiectiv este o funcție matematică cu valori reale, care exprimă o relație liniară sau neliniară între variabilele alese. Ea caracterizează din punct de vedere cantitativ criteriul adoptat și dă posibilitatea de decizie între diferitele soluții existente.

Atunci cînd criteriul acceptat este costul, funcția obiectiv se obține însumînd diferitele elemente componente ale acestuia, exprimate în raport cu variabilele fixate.

Soluțiile admisibile, din rîndul cărora se alege varianta optimă prin identificarea variabilelor ce conduc la valori extreme ale funcției obiectiv, trebuie să satisfacă anumite condiții. Acestea se exprimă analitic prin egalități sau inegalități ce impun limitări unei variabile sau unui grup de variabile și constituie restricțiile problemei.

Ele decurg din analiza situațiilor limită ce apar în timpul realizării și exploatării construcției și se referă la : eforturi sau deplasări ce nu trebuie depășite, asigurarea contra fenomenului de pierdere a stabilității, evitarea rezonanței, a fisurării excesive, prezentîndu-se sub forma :

$$g_i(x)=g_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\leqslant a_i \tag{1.2}$$

Alte restricții privesc configurația geometrică a elementelor componente sau ale secțiunilor transversale și au de regulă caracterul încadrării variabilelor între anumite limite :

$$L_{inf}\leqslant g_i(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_p)\leqslant L_{sup} \tag{1.3}$$

Există și restricții ce se impun direct variabilelor, cum ar fi cea de nonnegativitate ($x_k>0$), sau condiția ca unele sau toate componentele vectorului X să fie numere întregi.

În problemele de optimizare intervin situații cînd variabilele, parțial sau în totalitate, nu pot fi considerate independente, deoarece satisfac ecuații de condiție, cum sînt cele întîlnite în statica structurilor sau relațiile ce exprimă echilibrul mecanic în diverse stadii de lucru. Ele reprezintă condiții restrictive și trebuie luate în considerare în procesul de optimizare.

Definirea restricțiilor necesită atenție și discernămînt, pentru ca acestea să nu se excludă reciproc, situație în care nu ar mai fi posibil să se delimiteze domeniul soluțiilor admisibile

Nu întotdeauna sistemul de relații descris determină o soluție unică. Se întîlnesc cazuri cînd mai multe variante admisibile satisfac același criteriu sau, cînd în procesul de optimizare se ajunge la un optim relativ, diferit de cel global.

Mulțimea soluțiilor posibile care satisfac condițiile impuse, alcătuiește domeniul adm sibil. Soluția optimă se găsește implicit în acest domeniu, deoarece la stabilirea ei s-a ținut seamă de totalitatea restricțiilor caracteristice fenomenului studiat.

Astfel, procesul de optimizare prin care se urmărește identificarea soluției optime, poate fi considerat ca o activitate de cercetare a domeniului soluțiilor admisibile.

Diferitele metode de optimizare se deosebesc între ele, în esență, prin modul de parcurgere a unei succesiuni de puncte situate în domeniul admisibil și prin procedeele ce servesc la accelerarea convergenței spre soluția căutată.

Cum, însă, optimizările devin din ce în ce mai complexe, limitele metodelor de programare matematică se arată a fi restrictive pentru aplicațiile practice. Astfel, elaborarea transformărilor matematice pentru determinarea direcțiilor posibile, senzitivitatea algoritmilor la dimensiunea pașilor și alegerea soluției inițiale sînt numai unele dintre dificultățile întîlnite în aplicarea metodelor de programare matematică la proiectarea optimă a structurilor. În acest caz criteriile de optimalitate devin din ce în ce mai importante deoarece ele implică în mod esențial deducerea condițiilor necesare și suficiente de optimalitate pentru obținerea unui optim avînd cerințe specifice de proiectare fiind asociat cu o anumită funcțională reală sau pseudo-energetică a sistemului.

Deoarece multe dintre aceste funcții energetice pot fi ușor determinate printr-o analiză de element finit, nici o transformare adițională nu va fi necesară pentru determinarea direcțiilor posibile. În ultimii zece ani au fost deduse criterii de optimizare discrete pentru un număr de condiții de proiectare implicînd rezistența, rigiditatea statică, rigiditatea dinamică, stabilitatea statică, etc. În U.S.A. au fost elaborate programele de calcul OPSTAT, OPTCOM, OPTIM, DESAP etc. care utilizează criterii de optimalitate discrete ca bază pentru optimizarea structurilor. Toate aceste programe sînt bazate pe metoda elementului finit și pot optimiza atît structuri izotrope cît și anizotrope.

CAPITOLUL 2

ALGORITMI DE OPTIMIZAREA STRUCTURILOR

Subiectul optimizare are particularități pentru fiecare disciplină. Factorul esențial este că optimizarea spre deosebire de analiză este o problemă cu mai multe valori. În general cele mai multe probleme de optimizare nu au o soluție unică. Procedeul uzual este de a stabili mulțimea condițiilor necesare și suficiente pentru un optim și astfel să se construiască un algoritm care conduce sistematic la o soluție ce satisface astfel de condiții. Dacă mai multe soluții satisfac condițiile, apare întrebarea care este optimul tuturor acestor optimuri. Deoarece optimul absolut nu satisface condiții adiționale el poate fi numai aproximativ în multe cazuri. Aceasta nesiguranță asupra naturii unui optim absolut a condus la dezvoltarea a numeroase algoritme de optimizare. Fiecare din acești algoritmi dă excelente rezultate pentru o clasă de probleme. În ciuda entuziasmului autorilor lor, nici un algoritm nu rezolvă toate problemele de optimizare cu aceeași eficiență. Evidența acestei dileme este continua dezvoltare a unor noi algoritmi de optimizare și modificarea altora mai vechi. În practică, însă, această dificultate nu este majoră. Un optimum relativ în unele cazuri este adecvat, deoarece costul nu este întotdeauna semnificativ în căutarea unui optim absolut.

Deoarece restricțiile impuse sînt neliniare și modelul structural în general nedeterminat, algoritmele de optimizare sînt întotdeauna iterative.

Algoritmele de optimizare cuprind doi pași principali:

a) Analiza structurii prin proiectare obișnuită, în scopul găsirii răspunsului ei la încărcările aplicate;

b) Reproiectarea, în care variabilele de proiectare sînt modificate în scopul minimizării funcției obiectiv și satisfacerii restricțiilor, deci o redistribuire a materialului. Redistribuția materialului este realizată prin utilizarea unei relații de recurență sau a unei formule de căutare.

Algoritmii de optimizare care au fost dezvoltați în legătură cu metoda elementului finit sînt următorii:

a) metodele de programare matematică sau metodele directe (programarea liniară și programarea neliniară);

b) metodele criteriului de optimalitate sau metodele indirecte.

În metodele programării matematice funcția obiectiv se minimizează direct prin diferite algoritme numerice. Algoritmele garantează o descreștere continuă și monotonă a funcției obiectiv fără a se interesa de natura fizică (sau uneori chiar matematică) a acesteia. Din acest motiv în mod frecvent sînt necesare calcule lungi și costisitoare pentru determinarea optimului. În schimb datorită formulării matematice independente, metodele programării matematice au un domeniu foarte larg de aplicabilitate.

Scanned with OKEN Scanner

În metodele indirecte se fixează apriori un criteriu și cînd acesta este satisfăcut optimul este realizat. Criteriul propus poate fi intuitiv sau riguros definit. Exemplul clasic al acestui tip de abordare îl constituie conceptul de rupere simultană, unde se consideră că cea mai bună proiectare este cea pentru care toate modurile de rupere apar simultan.

2.1. Metode de reproiectare

Metodele de optimizare ale structurilor sînt iterative și cer o analiză a proiectării în care dimensiunile elementelor sînt modificate progresiv. Metodele de reproiectare au scopul să analizeze eficient noile soluții utilizînd în mod eficient informațiile anterioare. În general, analiza unei structuri se poate realiza prin metoda deplasărilor (matricei de rigiditate), metoda forțelor (matricei de flexibilitate) sau prin metode mixte. Aici se va considera numai metoda deplasărilor iar procedee similare se vor putea aplica și pentru celelalte metode.

a) Analiza prin metoda deplsărilor

Analiza unei structuri prin metoda deplasărilor cere rezolvarea sistemului de ecuații liniare

$$[K]\{u\}=\{P\} \tag{2.1}$$

unde $[K]$ este matricea globală de rigiditate, $\{u\}$ este vectorul deplasărilor necunoscute iar $\{P\}$ este vectorul încărcărilor exterioare aplicate.

Ecuația (2.1) se referă la o singură condiție de încărcare. Pentru mai multe condiții de încărcare vectorii $\{u\}$ și $\{P\}$ devin matrici în care fiecare coloană corespunde unei anumite condiții de încărcare.

Soluția ecuației (2.1) poate fi obținută pe diferite căi. O posibilitate este de a calcula matricea inversă $[K]^{-1}$ și după aceea deplasările $\{u\}$

$$\{u\}=[K]^{-1}\{P\} \tag{2.2}$$

Inversarea matricei de rigiditate nu este practică și adesea nu este posibilă de obținut pentru structuri mari.

Metoda de descompunere Choleski este printre cele mai eficiente și precise metode de eliminare. Sistemul de ecuații (2.1) poate fi rezolvat de asemeni prin metode iterative ce implică aproximații succesive. O astfel de metodă este metoda Gauss-Seidel. Aceste metode ca și altele cum ar fi relaxarea, eliminarea și substructurarea sînt folosite adesea în analiza structurilor.

Se consideră o structură cu geometrie predeterminată, încărcare exterioară fixată, cu variație numai a variabilelor de proiectare (de exemplu dimensiunile secțiunilor transversale). Variația variabilelor de proiectare va antrena o variație corespunzătoare a matricei de rigiditate $[\Delta K]$ și a vectorului deplasărilor $\{\Delta u\}$.

Astfel, noul vector al deplasărilor este

$$\{u\}=\{u^*\}+\{\Delta u\} \tag{2.3}$$

iar noua matrice de rigiditate

$$[K]=[K^*]+[\Delta K] \tag{2.4}$$

Rezultă pentru analiza structurii noul sistem de ecuații

$$[K]\{u\}=\{P\} \tag{2.5}$$

care pe baza relațiilor precedente se scrie

$$([K^*]+[\Delta K])(\{u^*\}+\{\Delta u\})=\{P\} \tag{2.6}$$

Există următoarele metode de reproiectare :

— *Metode directe*, în care se dă soluția exactă a sistemului de ecuații. Aceste metode se aplică în cazurile cînd se modifică numai o mică porțiune a structurii.

— *Metode iterative* care se aplică în cazul unor modificări minore într-o parte importantă a structurii. Vectorul de deplasare inițial $\{u^*\}$ este considerat ca valoare inițială pentru soluția iterativă a sistemului de ecuații modificat.

— *Metode aproximative*, care se bazează pe rezolvarea unui sistem de ecuații redus sau pe dezvoltare în serie Taylor și pot fi suficiente pentru cazuri intermediare din proiectare unde nu se cere o analiză exactă.

În literatura de specialitate se recomandă utilizarea combinată a metodelor de reproiectare pentru reducerea efortului de calcul.

2.1.1. Metode directe

Metodele directe sînt mai eficiente dacă numărul de elemente modificate în matricea de rigiditate este limitat. Această situație apare în cazul în care un număr redus de elemente au dimensiunile secțiunilor transversale modificate. Matricea de rigiditate incrementală $[\Delta K]$ poate fi în acest caz micșorată prin eliminarea liniilor și coloanelor din zerouri și se obține o matrice incrementală redusă $[\Delta K_R]$ care are dimensiunea egală cu numărul coloanelor (sau liniilor) modificate în matricea $[K]$. Relația între $[\Delta K]$ și $[\Delta K_R]$ este următoarea

$$[\Delta K]=[b]^T[\Delta K_R][b] \tag{2.7}$$

unde $[b]$ este o matrice booleană cu linii linear independente, fiecare dintre ele conținînd numai zerouri exceptînd o valoare unitară plasată în coloana unde a apărut o modificare în matricea $[K]$. De exemplu, dacă $[\Delta K]$ este dată de

$$[\Delta K]=\begin{bmatrix} \Delta K_{11} & \Delta K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Delta K_{21} & \Delta K_{22} & \Delta K_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K_{32} & \Delta K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iar matricea $[b]$ de

$$[b]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matricea redusă $[\Delta K_R]$ este

$$[\Delta K_R]=\begin{bmatrix} \Delta K_{11} & \Delta K_{12} & 0 \\ \Delta K_{21} & \Delta K_{22} & \Delta K_{23} \\ 0 & \Delta K_{32} & \Delta K_{33} \end{bmatrix}$$

O metodă directă de reproiectare a structurii este cea de calcul a inversei matricei de rigiditate modificate $[K]^{-1}$ utilizînd matricea inversă cunoscută a matricei inițiale.

a) **Inversa matricei de rigiditate modificate**

Algoritmele pentru calculul $[K]^{-1}$ se bazează în mod obișnuit pe indentitatea Sherman-Morrison care poate fi scrisă sau pentru matricea incrementală $[\Delta K_R]$ sau pentru elementele sau coloanele acesteia. S-a demonstrat că formularea în care coloanele matricei $[\Delta K_R]$ sînt tratate succesiv cere aproximativ același număr de operații algebrice ca în cazul tratării simultane a tuturor elementelor lui $[\Delta K_R]$. Ambele variante sînt mai eficiente decît aceia a modificării numai a elementelor. Metodele prezentate de calcul ale matricei inverse modificate $[K]^{-1}$ pot fi mai eficiente în anumite cazuri, comparativ cu procedeul de eliminare Gauss. Ele nu sînt însă bine adaptate la modificări ale structurilor mari, deoarece modificările afectează direct $[K^*]^{-1}$ care este extrem de costisitoare de calculat în cazul matricelor bandă mari. Următoarea formulă pentru calculul $[K]^{-1}$ se poate deduce din identitatea Sherman-Morrison

$$[K]^{-1}=[K^*]^{-1}-[K^*]^{-1}[b]^T([I]+[\Delta K_R][b][K^*]^{-1}[b]^T)^{-1}[\Delta K_R][b][K^*]^{-1} \quad (2.8)$$

unde $[I]$ este matricea unitate. Matricele $[I]$ și $[\Delta K_R][b]\times[K^*]^{-1}[b]^T$ au aceleași dimensiuni cu $[\Delta K_R]$. Noile deplasări sînt calculate din (2.2).

Vectorul deplasărilor modificat se poate determina și direct, fără inversarea matricei de rigiditate modificate.

Alte metode directe se pot dovedi utile în rezolvarea problemelor de reproiectare sau reanaliză. Astfel, metoda generală a lui Argyris și Roy este aplicabilă în cazul modificărilor numărului de grade de libertate, adăugării sau eliminării unui segment al structurii, modificării matricei de rigiditate triangularizate și modificării elementelor în substructuri. Conceptul de element paralel prezentat de Sobieszczanski poate fi eficient pentru un mare număr de modificări. Aceste metode ca și altele sînt discutate de Arora într-o lucrare retrospectivă a tehnicilor de reproiectare sau reanaliză pentru răspunsul static și dinamic.

2.1.2. Metode iterative

Metodele iterative de reproiectare sînt potrivite în cazul unor modificări minore efectuate într-o parte mare a structurii. În acest caz vectorul deplasării $\{u\}$ poate fi utilizat succesiv ca soluție inițială în procesul iterativ. Un incovenient al acestor metode este acela că întregul proces trebuie să fie repetat pentru fiecare condiție de încărcare. Însă, datorită faptului că matricele de rigiditate sînt matrici bandă și posedă deobicei un mare număr de zerouri chiar în bandă o schemă iterativă ce utilizează numai elementele nenule din $[K]$ și $[\Delta K]$ este avantajoasă din punct de vedere al stocării și poate cere mai puține operații algebrice. O dificultate importantă care poate fi întîlnită în rezolvare este aceia a convergenței care nu este întotdeauna asigurată sau poate fi înceată.

a) **Iterare simplă**

Ecuațiile de analiză a structurii modificate (2.6) se pot rescrie

$$([K^*]+[\Delta K])\{u\}=\{P\} \quad (2.9)$$

sau

$$[K^*]\{u\}=\{P\}-[\Delta K]\{u\} \quad (2.10)$$

$\{r\}$ poate fi determinat prin procesul iterativ

$$[K^*\{u^{(k)}\}=\{P\}-[\Delta K]\{u^{(k-1)}\} \quad (2.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\{u^{(k)}\}$ este valoarea lui $\{u\}$ în ciclul k iar $\{u^{(0)}\}$ este vectorul inițial cunoscut din analiza precedentă

$$\{u^{(0)}\}=\{u^*\} \tag{2.12}$$

Ecuația (2.11) reprezintă o iterație simplă, similară metodelor matriciale convenționale iterative pentru rezolvarea sistemelor complexe.

Iterația simplă din ecuația (2.11) se poate exprima în forma unei serii infinite. Pentru compactitate, se definește

$$[B]=[K^*]^{-1}[\Delta K] \tag{2.13}$$

Multiplicînd la stînga ecuația (2.11) cu $[K^*]^{-1}$ și bazîndu-ne pe (2.1) și (2.13), iterația simplă este dată de

$$\{u^{(k)}\}=\{u^*\}-[B]\{u^{(k-1)}\} \tag{2.14}$$

Utilizînd soluția inițială din (2.12) ecuația (2.14) devine

$$\{u\}=([I])-[B]+[B]^2-[B]^3+[B]^4-\ldots)\{u^*\} \tag{2.15}$$

Această serie este o dezvoltare a $([I]+[B])^{-1}$

$$([I]+[B])^{-1}=[I]-[B]+[B]^2-[B]^3+[B]^4-\ldots \tag{2.16}$$

Iterația simplă definită aici va converge pentru matrici incrementale moderate la matricea de rigiditate. Condiția suficientă pentru convergența ecuației (2.14) la $\{u\}$ pentru $\{u^{(0)}\}$ arbitrar este

$$\lim_{k\to\infty}\|B^k\|=0 \tag{2.17}$$

unde $\|B^k\|$ este norma lui $[B]^k$.

b) **Iterația Jacobi**

O altă metodă pentru reanaliză sau reproiectare este iterația Jacobi.

Multiplicînd la stînga ecuația (2.9) cu $[K^*]^{-1}$ și considerînd (2.1) și (2.13) se obține

$$([I]+[B])\{u\}=\{u^*\} \tag{2.18}$$

Matricea $([I]+[B])$ se poate scrie

$$([I]+[B])=([I]+[B_d])+([B]-[B_d]) \tag{2.19}$$

unde $[B_d]$ este o matrice diagonală formată din elementele diagonalei principale ale matricei $[B]$. Substituind (2.19) în (2.18) și rearanjînd termenii rezultă

$$\{u\}=([I]+[B_d])^{-1}\{u^*\}-([I]+[B_d])^{-1}([B]-[B_d])\{u\} \tag{2.20}$$

Ecuația (2.20) reprezintă o aplicare a iterației Jacobi sistemului modificat din relația (2.18). Cum matricile $[I]$ și $[B_d]$ sînt diagonale, calculul matricei inverse $([I]+[B_d])^{-1}$ este simplu.

c) **Iterația bloc Gauss-Seidel**

Reproiectarea (reanaliza) se poate realiza de asemeni prin metoda Gauss-Seidel sub forma propusă de Phansalkar. Matricea $[B]$ din ecuația (2.13) se poate „splita" astfel

$$[B]=[B_i]+[B_s]+[B_d], \tag{2.21}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $[B_i]$, $[B_s]$, $[B_d]$ sînt respectiv matricile triunghiulare inferioară, superioară și diagonală. Substituind (2.22) în (2.18), rezultă

$$([I]+[B_i]+[B_s]+[B_d])\{u\}=\{u^*\} \tag{2.22}$$

Trecînd matricea $[B_s]$ în membrul drept se obține iterația

$$([I]+[B_i]+[B_d])\{u^{(k)}\}=\{u^*\}-[B_s]\{u^{(k-1)}\}. \tag{2.23}$$

Această iterație este cunoscută ca fiind iterația Gauss-Seidel aplicată sistemului modificat (2.18). Deoarece matricea $([I]+[B_i]+[B_d])$ este o matrice triunghiulară inferioară, nu este necesară nici o inversiune.

Dificultatea constă însă în aceea că atît expresia iterației Jacobi (2.20) cît și iterația Gauss-Seidel (2.23) cer calculul matricei inverse $[K^*]^{-1}$ pentru determinarea matricei $[B]$ (2.13). Conform studiului lui Phansalkar se definește o matrice $[C]$ cu structură bloc-diagonală, astfel încît blocurile ei diagonale sînt inversele blocurilor diagonale corespunzătoare ale elementelor matricei $[D]=([I]+[B])$, și anume

$$[D]=([I]+[B])=\begin{bmatrix} [D_{11}] & \cdots & [D_{1j}] & \cdots & [D_{1n}] \\ \vdots & & & & \\ [D_{i1}] & \cdots & [D_{ij}] & \cdots & [D_{in}] \\ \vdots & & & & \\ [D_{n1}] & \cdots & [D_{nj}] & \cdots & [D_{nn}] \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$[C]=([I]+[B])^{-1}=\begin{bmatrix} [D_{11}]^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & [D_{ii}]^{-1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & [D_{nn}]^{-1} \end{bmatrix}$$

Înmulțind la stînga ecuația (2.18) cu matricea $[C]$ avem

$$[C]([I]+[B])\{u\}=[C]\{u^*\} \tag{2.25}$$

sau în formă compactă

$$[E]\{u\}=\{F\} \tag{2.26}$$

unde

$$[E]\equiv[C]([I]+[B]),\quad \{F\}\equiv[C]\{u^*\} \tag{2.27}$$

Matricea $[E]$ este splitată astfel

$$[E]=([E_i]+[I]+[E_s]) \tag{2.28}$$

Substituind (2.28) în (2.26) și introducînd iterația Gauss-Seidel se obține

$$([E]+[I])\{u^{(k)}\}=-[E_s]\{u^{(k-1)}\}+\{F\} \tag{2.29}$$

Aceasta este iterația bloc Gauss-Seidel aplicată sistemului modificat (2.18)

d) **Iterație separată a componentelor**

Kirsch și Rubinstein au propus o iterație separată pentru componentele lui $\{r\}$. Matricea $[\Delta K]$ este scrisă ca o combinație liniară de două matrici

$$[\Delta K]=[G]+[H] \tag{2.30}$$

în care matricea $[G]$ este astfel aleasă încît să amelioreze convergența.

Înmulțind la stînga ecuația (2.19) cu $[K^*]^{-1}$, adăugînd $([K^*]^{-1}[G]\{u\})$ fiecărui membru al relației și rezolvînd în raport cu $\{u\}$ rezultă :

$$\{u\}=([I]+[K^*]^{-1}[G])^{-1}(\{u^*\}+([K^*]^{-1}[G]-[B])\{u^*\}) \tag{2.31}$$

Alegînd $[G]$ astfel încît

$$[G]=\alpha[K^*] \tag{2.32}$$

unde α este un scalar ce va fi deasemeni ales, ecuația (2.32) devine

$$\{u\}=([I]+\alpha[I])^{-1}(\{u^*\}+(\alpha[I]-[B])\{u\}=\frac{1}{1+\alpha}(\{u^*\}+(\alpha[I]-[B])\{u\}) \tag{2.33}$$

Pentru a rezolva $\{u\}$ prin iterație, ecuația (2.34) se scrie în forma

$$\{u^{(k)}\}=\frac{1}{1+\alpha}(\{u^*\}+(\alpha[I]-[B])\{u^{(k-1)}\}) \tag{2.34}$$

sau dezvoltînd în serie

$$\{u\}\equiv\frac{1}{1+\alpha}\left([I]+\frac{\alpha[I]-[B]}{1+\alpha}+\left(\frac{\alpha[I]-[B]}{1+\alpha}\right)^2+\left(\frac{\alpha[I]-[B]}{1+\alpha}\right)^3+\dots\right)\{u^*\} \tag{2.35}$$

Se definesc

$$\{T_1\}\equiv[B]\{u^*\}\qquad\{T_2\}\equiv[B]\{T_1\}\qquad\{T_3\}\equiv[B]\{T_2\} \tag{2.36}$$

Substituind (2.37) în (2.36) se obține

$$\{u\}=\frac{1}{1+\alpha}\left(\{u^*\}-\frac{\{T_1\}-\alpha\{u^*\}}{(1+\alpha)}+\frac{\{T_2\}-2\alpha\{T_1\}+\alpha^2\{u^*\}}{(1+\alpha)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\{T_3\}-3\alpha\{T_2\}+3\alpha^2\{T_1\}-\alpha^3\{u^*\}}{(1+\alpha)^3}+\dots\right) \tag{2.37}$$

Componenta j a lui $\{u\}$, u_j, este dată de

$$u_j=\frac{1}{1+\alpha_j}\left(u_j^*-\frac{T_{1,j}-\alpha_j u_j^*}{1+\alpha_j}+\frac{T_{2,j}-2\alpha_j T_{1,j}+\alpha_j^2 u_j^*}{(1+\alpha_j)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{T_{3,j}-3\alpha_j T_{2,j}+3\alpha_j^2 T_{1,j}-\alpha_j^3 u_j^*}{(1+\alpha_j)^3}+\dots\right) \tag{2.38}$$

unde u_j^*, $T_{1,j}$, $T_{2,j}$, $T_{3,j}$ sînt respectiv a j-a componentă a vectorilor $\{u^*\}$, $\{T_1\}$, $\{T_2\}$, $\{T_3\}$ iar α_j este valoarea selectată a lui α pentru calculul lui u_j.

O bună alegere a lui α_j este cea care rezultă prin anularea celui de al doilea termen al seriei (2.38), astfel

$$T_{1,j}-\alpha_j u_j^*=0 \tag{2.39}$$

de unde

$$\alpha_j=\frac{T_{1,j}}{u_j^*} \tag{2.40}$$

Exemplul 2.1. Se ilustrează aplicarea metodei de rezolvare iterative în reanaliza structurilor, pe grinda continuă din fig. 2.1.

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră raportul $EI/l=1{,}0$ pentru toate deschiderile în structura inițială. De asemeni următoarele date rezultă din analiza inițială

$$[K^*]=\begin{bmatrix} 8 & 2 & & \\ 2 & 8 & 2 & \\ & 2 & 8 & 2 \\ & & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad [K^*]^{-1}=\frac{1}{209}\begin{bmatrix} 28 & -7{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ -7{,}5 & 30 & -8 & 2 \\ 2 & -8 & 30 & -7{,}5 \\ -0{,}5 & 2 & -7{,}5 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\{P\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \{u^*\}=\begin{Bmatrix} 0{,}10526 \\ 0{,}07895 \\ 0{,}07895 \\ 0{,}10526 \end{Bmatrix}$$

Se presupun următoarele variații ale rigidității: 100% în deschiderile 1 și 5; 150% în deschiderile 2 și 4; 200% în deschiderea 3. Matricea rezultantă incrementală $[\Delta K]$, este dată de

$$[\Delta K]=\begin{bmatrix} 10 & 3 & & \\ 3 & 14 & 4 & \\ & 4 & 14 & 3 \\ & & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

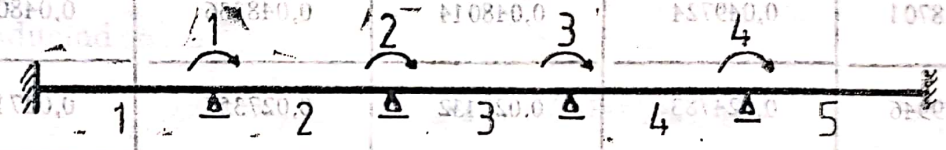


Fig. 2.1

Matricele $[B]$, $[D]$, $[C]$, $[E]$, $\{F\}$, $\{T_1\}$, $\{T_2\}$ sînt calculate din ecuațiile $[B]=[K^*]^{-1}[\Delta K]$, (2.24), (2.27), (2.36) iar α_i din ecuația (2.40)

$$[B]=\begin{bmatrix} 1{,}23210 & -0{,}06220 & -0{,}01675 & 0{,}00478 \\ 0{,}07177 & 1{,}74880 & 0{,}06699 & -0{,}01914 \\ -0{,}01914 & 0{,}06699 & 1{,}74880 & 0{,}07177 \\ 0{,}00478 & -0{,}01675 & -0{,}06220 & 1{,}23210 \end{bmatrix}$$

$$[D]=\begin{bmatrix} 2{,}23210 & -0{,}06220 & -0{,}01675 & 0{,}00478 \\ 0{,}07177 & 2{,}74880 & 0{,}06699 & -0{,}01914 \\ -0{,}01914 & 0{,}06699 & 2{,}74880 & 0{,}07177 \\ 0{,}00478 & -0{,}01675 & -0{,}06220 & 2{,}23210 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [D_{11}] & [D_{12}] \\ [D_{21}] & [D_{22}] \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 0{,}44768 & 0{,}01013 & & \\ -0{,}01169 & 0{,}36353 & & \\ & & 0{,}36353 & -0{,}01169 \\ & & 0{,}01013 & 0{,}44768 \end{bmatrix}$$

$$[E]=\begin{bmatrix} 1 & & -0{,}00682 & 0{,}001946 \\ & 1 & 0{,}02455 & -0{,}007014 \\ -0{,}007014 & 0{,}02455 & 1 & 0 \\ 0{,}001946 & -0{,}00682 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}0,04792\\0,02747\\0,02747\\0,04792\end{Bmatrix}\qquad \{T\}=\begin{Bmatrix}0,123961\\0,148896\\0,148896\\0,123961\end{Bmatrix}$$

$$\{T_2\}=\begin{Bmatrix}0,141569\\0,276888\\0,276888\\0,141569\end{Bmatrix}\qquad \begin{aligned}\alpha_1&=1,177665\\\alpha_2&=1,885953\\\alpha_3&=1,885953\\\alpha_4&=1,177665\end{aligned}$$

Tabelul 2.1

Rezultatele rezolvării iterative

Rezultate după un ciclu — $\{u\}$				
Ec.(2.11)	Ec.(2.20)	Ec.(2.29)	Ec.(2.38)	Rezultatul adevărat $\{u\}$
−0,018701	0,049724	0,048014	0,048336	0,0480167
−0,069946	0,024783	0,027132	0,027357	0,0271399
−0,069946	0,024783	0,027141	0,027357	0,0271399
−0,018701	0,049724	0,0248012	0,048336	0,0480167

Exemplul a fost rezolvat prin interație simplă, ec. 2.11, iterația Jacobi ec. 2.20 iterată, iterația bloc Gauss-Seidel, ec. 2.29, și interația separată a componentelor, ec. 2.38. Rezultatele obținutI după un ciclu de iterație (sau utilizînd numai primul termen al seriei (2.38)) și rezultatul adevărat sînt prezentate în tabelul 2.1. Se notează că prin simpla iterație nu se realizează convergența în acest exemplu. Aceasta este datorită faptului că variațiile rigidității sînt relativ mari (elementele matricei $[\Delta K]$). Cu celelalte metode, convergența a fost rapidă.

2.1.3. Metode aproximative

În optimizarea structurilor adesea este suficient să se utilizeze o reanalizare aproximativă în calculele intermediare pentru ca efortul de calcul să se micșoreze. Algoritmii de aproximare pot fi eficienți în multe cazuri dar prezintă deficiențe privind exactitatea soluției.

a) Metoda bazei reduse

Se consideră că vectorul de deplasare $\{u\}$ al noii soluții de proiectare poate fi aproximat printr-o combinație liniară de s vectori liniari independenți $\{u_1^*\}$, $\{u_2^*\}$, ... $\{u_s^*\}$ ai soluțiilor deja proiectate anterior.

Aici s este numărul variabilelor de proiectare, în mod obișnuit mai redus decît numărul gradelor de libertate (m)

$$\{u\}\approx y_1\{u_1^*\}+y_2\{u_2^*\}+\ldots+y_s\{u_s^*\} \tag{2.41}$$

sau în formă matriceală

$$\{u\}\approx[u_B^*]\{y\} \tag{2.42}$$

unde

$$\underset{m\times s}{[u_B^*]}=[\{u_1^*\},\{u_2^*\},\ldots,\{u_s^*\}]\{y\}=\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_s\end{Bmatrix} \tag{2.43}$$

$\{y\}$ este un vector cu elemente nedeterminate ce sînt obținute prin rezolvarea sistemului de ecuații (2.47). Bazîndu-ne pe ecuația (2.1), ecuația de analiză a noii soluții de proiectare este

$$\underset{m\times m}{[K]}\underset{m\times 1}{\{u\}}=\underset{m\times 1}{\{P\}} \tag{2.44}$$

unde $[K]$ este matricea de rigiditate a noii soluții de proiectare.

Înlocuind ecuația (2.42) în (2.44) și înmulțirea la stînga cu $[u_B^*]^T$ rezultă

$$\underset{s\times m}{[u_B^*]^T}\underset{m\times m}{[K]}\underset{m\times s}{[u_B^*]}\underset{s\times 1}{\{y\}}=\underset{s\times m}{[u_B^*]^T}\underset{m\times 1}{\{P\}} \tag{2.45}$$

Introducînd notația

$$[K_R]=[u_B^*]^T[K][u_B^*];\quad \{P_R\}=[u_B^*]^T\{P\} \tag{2.46}$$

și substituind în ecuația (2.45) se obține

$$\underset{s\times s}{[K_R]}\underset{s\times 1}{\{y\}}=\underset{s\times 1}{\{P_R\}} \tag{2.47}$$

Pentru cazurile cînd $s\ll m$, vectorul de deplasare aproximativ se poate obține prin rezolvarea sistemului de ecuații de mici dimensiuni (2.47) cu necunoscutele $\{y\}$, în loc să se rezolve sistemul de mari dimensiuni (2.44) care dă soluția exactă $\{u\}$ se calculează din relația (2.42).

Problema de bază în utilizarea metodei bazei reduse este legată de alegerea vectorilor liniar independenți $\{u_1^*\}$, $\{u_2^*\}$, ..., $\{u_s^*\}$. Vectorii deplasărilor din soluțiile precedente se pot utiliza, cu observația însă că o alegere intuitivă, poate conduce la aproximații nesatisfăcătoare.

O posibilitate de alegere constă în dezvoltarea în serie Taylor a lui $\{u\}$ și reținerea primului termen. Astfel s-a propus baza de vectori $s=n+1$:

$$\{u_2^*\}=\{u^*\}\quad \{u_{j+1}^*\}=\left\{\frac{\partial u^*}{\partial x_j}\right\}j=1,\ldots,n \tag{2.48}$$

Există în relația de mai sus vectorul de proiectare inițial $\{u^*\}$ și o bază de vectori pentru fiecare variabilă de proiectare X_j. o bază de vectori pentru fiecare variabilă de proiectare X_j. Baza de vectori este normalizată pentru a evita erorile de rotunjire. Un avantaj al alegerii efectuate este acela de a avea vectorii de analiză a senzitivității ce aduc informații privind efectul variațiilor produse în variabilele de proiectare asupra comportării structurii.

Scanned with OKEN Scanner

b) **Dezvoltarea în serie Taylor**

Dezvoltarea în serie Taylor poate fi utilizată pentru calculul noului vector deplasare $\{u\}$ corespunzător variabilelor de proiectare modificate

$$\{u\} \approx \{u^*\} + \sum_{j=1}^{n} (X_j - X_j^*) \left\{ \frac{\partial u^*}{\partial X_j} \right\} \tag{2.49}$$

Ecuația (2.49) reprezintă aproximația de primul ordin al seriei Taylor. $\{\partial u^*/\partial X\}$ se obține prin diferențierea ecuației (2.1) în raport cu X_j

$$[K^*] \left\{ \frac{\partial u^*}{\partial X_j} \right\} = - \left[\frac{\partial K^*}{\partial X_j} \right] u^* \} \tag{2.50}$$

$\{P\}$ este tratat ca fiind independent de X_j. Deoarece ecuațiile (2.1) și (2.50) au aceiași structură formală, se poate utiliza aceiași subrutină de calcul pentru aflarea soluției $\{\partial u^*/\partial X_j\}$. Costul calculelor în acest mod este aceeași cu cel cerut în cazul unei singure încărcări și este mult mai mic decît costul unei analize complete. Evident, pot fi considerați și termeni de ordin superior din dezvoltarea în serie Taylor. Aceasta va conduce însă la un timp de calcul mai lung și la o stocare de date mai costisitoare, dar la rezultate mai exacte.

c) **Modificarea substructurii**

Tehnica substructurilor este o cale eficientă pentru analiza structurilor complexe și de mari dimensiuni. Metodele aproximative studiate precedent, a bazei reduse și a dezvoltării în serie Taylor se pot utiliza împreună cu metoda substructurilor. Ecuațiile de echilibru modificate pentru fiecare dintre substructuri se pot scrie în forma

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{ii}] & [K_{ie}] \\ \hline [K_{ei}] & [K_{ee}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ \hline u_e \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P_i \\ \hline P_e \end{array} \right\} \tag{2.51}$$

în care indicele e indică nodurile exterioare (sau de interfață) iar indicele i, nodurile interioare ale substructurii. În analiza clasică a substructurilor gradele interioare de libertate se exprimă în funcție de cele exterioare. Procesul de condensare este reprezentat de

$$[K_s] \{u_e\} = \{P_s\} \tag{2.52}$$

unde $[K_s]$ și $\{P_s\}$ sînt respectiv matricea efectivă sau condensată a substructurii și vectorul încărcării, date de

$$[K_s] = [K_{ee}] - [K_{ei}] [K_{ii}]^{-1} [K_{ie}] \tag{2.53}$$

$$\{P_s\} = \{P_e\} - [K_{ei}] [K_{ii}]^{-1} \{P_s\} \tag{2.54}$$

Din ecuațiile (2.53) și 2.54) matricea inversă nu este dată explicit ; produsele

$$[K_{ii}]^{-1} [K_{ie}] = [M_i], \tag{2.55}$$

$$[K_{ii}]^{-1} \{P_i\} = [Q_i] \tag{2.56}$$

se obțin din rezolvarea ecuației

$$[K_{ii}] [M_i \mid Q_i] = [K_{ie} \mid P_i] \tag{2.57}$$

Ecuațiile de comportare ale structurii întregi se obțin prin asamblarea matricelor de rigiditate $[K_s]$ și a vectorilor încărcărilor $\{P_s\}$ ai tuturor substructurilor. Vectorul deplasării $\{u_e\}$ al fiecărei substructuri este extras din vectorul deplasărilor nodurilor tuturor interferențelor, se substituie înapoi în ecuațiile substructurii și se obțin deplasările interioare.

Utilizînd metoda bazei reduse, vectorii $\{u_i\}$, $\{u_s\}$ sînt aproximați printr-o combinație liniară de n vectori liniari independenți pe o cale similară celei din ecuațiile (2.41) — (2.43)

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ \cdots \\ u_e \end{Bmatrix} \approx \left[\begin{array}{c} u^*_{Bi} \\ \hline u^*_{Be} \end{array}\right] \{y\}, \tag{2.58}$$

$$[u^*_{Bi}] = \left[\left\{\frac{\partial u^*_i}{\partial X_1}\right\}, \left\{\frac{\partial u^*_i}{\partial X_2}\right\}, \ldots, \left\{\frac{\partial u^*_i}{\partial X_n}\right\}\right] \tag{2.59}$$

$$[u^*_{Be}] = \left[\left\{\frac{\partial u^*_e}{\partial X_1}\right\}, \left\{\frac{\partial u^*_e}{\partial X_2}\right\}, \ldots, \left\{\frac{\partial u^*_e}{\partial X_n}\right\}\right]. \tag{2.60}$$

Vectorii din ecuațiile (2.58) și (2.59) sînt normalizați în scopul reducerii erorilor de rotunjire numerică iar n este presupus a fi mult mai mic decît dimensiunile matricelor de rigiditate ale substructurilor date de (2.52) și (2.53). Se notează că bazele reduse $[u^*_{Bi}]$, $[u^*_{Be}]$ nu conțin soluțiile inițiale $\{u^*_i\}$ și $\{u^*_e\}$ cum s-a sugerat în (2.48), deoarece ele sînt combinații ale vectorilor din ecuațiile (2.58) și (2.59). $\{y\}$ se calculează pe o cale similară celei din ecuațiile (2.44) la (2.47). Ecuațiile pentru întreaga structură sînt

$$[K_R]\{y\} = \{P_R\} \tag{2.61}$$

unde $[K_R]$ și $\{P_R\}$ sînt obținute prin însumarea contribuțiilor tuturor substructurilor

$$[K_R] = \sum_j [K_R]_j \quad \{P_R\} = \sum_j \{P_R\}_j \tag{2.62}$$

Matricele substructurilor $[K_R]_j$ și $\{P_R\}_j$ sînt calculate din (2.51), (2.57)

$$[K_R]_j = [u^*_{Bi}]^T[K_{ii}][u^*_{Bi}] + [u^*_{Be}]^T[K_{ee}][u^*_{Be}] + [u^*_{Bi}]^T[K_{ie}][u^*_{Be}] + [u^*_{Be}]^T[K_{ei}][u^*_{Bi}] \tag{2.63}$$

$$\{P_R\}_j = [u^*_{Bi}]\{P_i\} + [u^*_{Be}]^T\{P_e\}. \tag{2.64}$$

După determinarea necunoscutelor $\{y\}$, ec. (2.61), noile deplasări $\{u_i\}$ și $\{u_e\}$ sînt calculate din ec. (2.58);.

Utilizînd dezvoltarea în serie Taylor, noii vectori ai deplasărilor $\{u_i\}$ și $\{u_e\}$ ai fiecărei substructuri, corespunzători variabilelor de proiectare modificate $\{X_j\}$ sînt aproximați prin

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ \cdots \\ u_e \end{Bmatrix} \simeq \begin{Bmatrix} u^*_i \\ \cdots \\ u^*_e \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^{n} (X_j - X^*_j) \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u^*_i}{\partial X_j} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial u^*_e}{\partial X_j} \end{Bmatrix} \tag{2.65}$$

Vectorii $\{\partial u^*_i/\partial X_j\}$ și $\{\partial u^*_e/\partial X_j\}$ se pot calcula prin diferențierea ecuațiilor (2.51)

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{ii}^*] & [K_{ie}^*] \\ \hline [K_{ei}^*] & [K_{ee}^*] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u_i^*}{\partial X_j} \\ \hline \dfrac{\partial u_e^*}{\partial X_j} \end{array}\right\} = - \left\{\begin{array}{c} \left[\dfrac{\partial K_{ii}^*}{\partial X_j}\right]\{u_i^*\} + \left[\dfrac{\partial K_{ie}^*}{\partial X_j}\right]\{u_e^*\} \\ \hline \left[\dfrac{\partial K_{ei}^*}{\partial X_j}\right]\{u_i^*\} + \left[\dfrac{\partial K_{ee}^*}{\partial X_j}\right]\{u_e^*\} \end{array}\right\} \tag{2.66}$$

Vectorul interior $\{\partial u_e/\partial X_j\}$ poate fi eliminat și rezultatul este [(2.51) la (2.54)]

$$[K_s^*]\left\{\frac{\partial u_e^*}{\partial X_j}\right\} = -\left[\frac{\partial K_{ei}^*}{\partial X_j}\right]\{u_i^*\} - \left[\frac{\partial K_{ee}^*}{\partial X_j}\right]\{u_e^*\} + [K_{ei}^*][K_{ii}^*]^{-1}\left\{\left[\frac{\partial K_{ii}^*}{\partial X_j}\right]\{u_i^*\} + \left[\frac{\partial K_{ie}^*}{\partial X_j}\right]\{u_e^*\}\right\} \tag{2.67}$$

Prin asamblarea diferitelor substructuri, se poate calcula vectorul derivatelor tuturor interfețelor. Procedeul de rezolvare al derivatelor interioare este similar aceluia de calcul al deplasărilor $\{u_i^*\}$. De notat că matricele $[K_{ii}^*]$, $[K_s^*]$ și matricea de rigiditate a întregii structuri sînt descompuse o singură dată în procesul de obținere a soluției inițiale.

Matricele descompuse sînt utilizate la calculul derivatelor $\{\partial u_i^*/\partial X_j\}$ și $\{\partial u_e^*/\partial X_j\}$.

d) **Concluzii**

Pentru fiecare metodă descrisă trebuie să se considere numărul de operații algebrice, cerințele de stocaj, exactitatea soluției, dificultățile de programare. Metoda directă nu este aplicabilă marilor probleme, deoarece trebuie calculată matricea inversă $[K^*]^{-1}$. Metodele directe sînt utilizate atunci cînd modificările privesc un număr redus de elemente ale matricei de rigiditate. Metodele interative sînt cele mai eficiente în cazul unor mici modificări. În cazul unor modificări importante, convergența poate fi slabă. Metoda de iterație simplă cere cel mai mic efort de calcul dar convergența poate fi înceată. Metodele aproximative de reanaliză sînt suficiente acolo unde nu se cere o analiză exactă. Aceasta poate fi cazul în analizele intermediare efectuate înainte de atingerea optimului.

Experiența obținută cu metodele aproximative arată că rezultatele metodei bazei reduse sînt mai exacte decît cele ale aproximării liniare din seria Taylor. Metoda substructurilor combinată cu metodele aproximative poate fi eficientă în rezolvarea problemelor de mari dimensiuni. În anumite cazuri o combinație între două metode, cum ar fi interația și seria Taylor poate conduce la bune rezultate.

2.2. Metodele criteriului de optimalitate

Metodele criteriului de optimalitate nu sînt atît de generale ca acelea ale programării matematice, însă sînt mai eficiente din punct de vedere al calculului. În schimb ele depind de particularitățile de comportare ale structurii iar convergența la optim nu este întotdeauna garantată. Aplicarea metodelor criteriului de optimialitate implică deducerea unui criteriu corespunzător pentru condiții de proiectare specializate și stabilirea unui procedeu iterativ pentru finalizarea proiectării. În timp ce diferite criterii utilizate pot fi similare, procedeele numerice propuse diferă mult. Criteriile de optimialitate sînt legate de eforturile unitare, de restricțiile de deplasare, de flambaj, răspunsul dimic, comportarea neliniară etc.

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul eforturilor unitare se bazează pe considerația că într-o structură optimală fiecare element este supus la eforturile unitare admisibile în cel puțin un caz de încărcare. Aceasta este un criteriu intitutiv numit proiectarea de egală rezistență. În mod similar, criteriul deplasării se bazează pe ipoteza că deplasările în anumite locuri ale structurii optime sînt egale cu valorile lor admisibile.

Procedeele numerice propuse pentru utilizarea metodelor criteriului de optimalitate sînt în esența lor interative, bazîndu-se pe relații de recurență. În general, nu se face nici o aproximare în deducerea criteriilor de optimalitate, acestea apărînd din utilizarea diferiților algoritmi de rezolvare.

2.2.1. Formulare generală

Problema de optimizare a dimensiunilor unei structuri se poate formula în felul următor :

Să se găsească variabilele (dimensiunile secțiunilor transversale) $\{X\}=\{X_1, \ldots, X_n\}$ astfel încît

$$Z=Z(\{X\}) \to \min \tag{2.68}$$

$$g_j(\{X\}) \leqslant 0, \quad j=1, \ldots, m \tag{2.69}$$

Considerînd greutatea ca funcție obiectiv, (2.68) este o funcție liniară de variabilele $\{X\}$

$$Z=\{C\}^T\{X\} \tag{2.70}$$

unde $\{C\}$ este un vector cu elemente care reprezintă densitatea materialului și lungimile elementelor. Variabilele $\{X\}$ pot reprezenta, de exemplu, suprafața secțiunii transversale a barei în cazul solicitării axiale sau modulul de rezistență în cazul elementelor încovoiate.

Restricțiile (2.69) pot include următoarele inegalități :

dimensiunile minime $\{X^L\}-\{X\} \leqslant \{0\}$ (2.71)

deplasarea maximă $\{u\}-\{u^s\} \leqslant \{0\}$ (2.72)

eforturi unitare maxime $\{\sigma\}-\{\sigma^s\} \leqslant \{0\}$ (2.73)

$\{X^L\}$, $\{u^s\}$ și $\{\sigma^s\}$ sînt limitele date ale variabilelor $\{X\}$, deplasărilor $\{u\}$ și eforturilor unitare $\{\sigma\}$.

Se definește vectorul variabilelor de proiectare inverse sau vectorul variabilelor reciproce :

$$\{Y\}^T=\{Y_1, \ldots, Y_n\}=\{1/X_1, \ldots, 1/X_n\} \tag{2.74}$$

Considerînd metoda lucrului mecanic virtual pentru analiză, $\{u\}$ se exprimă astfel

$$\{u\}=[B]\begin{Bmatrix}1\\ \cdots\\ X\end{Bmatrix}=[B]\{Y\} \tag{2.75}$$

unde elementele matricei $[B]$ sînt date de

$$B_{ji}=\frac{F_i F_{ji}^0 l_i}{E} \tag{2.76}$$

F_i este forța din elementul i datorită încărcării reale, F_{ji} este forța din elementul i datorită încărcării virtuale $Q_j=1{,}0$ aplicată în direcția j ; l_i este lungimea elementului iar E este modulul de elasticitate.

Ecuația (2.76) se bazează pe ipoteza că elementul este solicitat sau de forță axială sau de moment încovoietor. Evident, însă că formularea prezentă poate fi generalizată la cazul mai multor solicitări simultane.

Eforturile unitare $\{\sigma\}$ sînt date de

$$\{\sigma\}=[S]\{u\}=[S][B]\left\{\frac{1}{X}\right\}=[S][B]\{Y\} \tag{2.77}$$

Elementele matricei $[S_0]$ nu depind de dimensiunile elementelor deci ele sînt constante. Dacă structura este static determinată, forțele F_i și F_{ji} sînt constante, prin urmare elementele matricei $[B]$ vor fi, de asemeni, constante. La structurile nedeterminate unde redistribuția solicitărilor depinde de dimensiunile elementelor, elementele matricei $[B]$ sînt funcții de variabilele de proiectare.

a) **Scara de proiectare**

Se consideră o structură pentru care elementele matricei de rigiditate $[K]$ sînt funcții liniare de $\{X\}$ iar componentele vectorului de încărcare $\{P\}$ sînt independente de $\{X\}$. Din relația

$$[K]\{u\}=\{P\}$$

se observă că pentru $\lambda\{X^*\}$ deplasările vor fi $\frac{1}{\lambda}\{u^*\}$. Aici λ este un multiplicator scalar iar $\{X^*\}$ o soluție dată. Datorită relației liniare între $\{u\}$ și $\{\sigma\}$ eforturile unitare sînt $\frac{1}{\lambda}\{\sigma^*\}$. Proprietățile de mai sus se pot exprima astfel

$$\begin{aligned} u_j(\lambda\{X^*\})&=\frac{1}{\lambda}u_j(\{X^*\}), \quad j=1, \ldots, M \\ \sigma_i(\lambda\{X^*\})&=\frac{1}{\lambda}\sigma_i(\{X^*\}) \quad i=1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.78}$$

unde M este numărul deplasărilor. În cazul variabilelor reciproce avem

$$\begin{aligned} u_j(\lambda\{Y^*\})&=\lambda u_j(\{Y^*\}) \quad j=1, \ldots, M \\ \sigma_i(\lambda\{Y^*\})&=\lambda\sigma_i(\{Y^*\}) \quad i=1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.79}$$

Semnificația acestor proprietăți este aceea că o soluție de proiectare dată poate fi ușor modificată prin multiplicatorul λ încît orice deplasare sau efort dorit poate fi făcut egal cu valoarea limită.

b) **Aproximarea explicită a restricțiilor**

Elementele matricei $[B]$ sînt în mod obișnuit funcții implicite de variabilele de proiectare. În consecință deplasările $\{u\}$ și eforturile unitare $\{\sigma\}$ sînt deasemeni funcții implicite de $\{X\}$. Mulți algoritmi ai metodei criteriului de optimalitate se bazează pe aproximații de prim ordin.

Astfel, dezvoltarea în serie Taylor a lui $\{u\}$ și $\{\sigma\}$ în funcție de $\{X\}$ în jurul punctului $\{X^*\}$ dă

$$\begin{aligned} \{u\}&\approx\{u^*\}+[\nabla u_0^*](\{X\}-\{X^*\}) \\ \{\sigma\}&\approx\{\sigma^*\}+[\nabla\sigma_0^*](\{X\}-\{X^*\}) \end{aligned} \tag{2.80}$$

în care $\{u^*\}$, $\{\sigma^*\}$ sînt vectorii $\{u\}$, $\{\sigma\}$ calculați în $\{X^*\}$ iar $[\nabla u_0^*]$, $[\nabla\sigma_0^*]$

$$[\nabla u_x^*]=\left[\left\{\frac{\partial u^*}{\partial X_1}\right\},\ldots,\left\{\frac{\partial u^*}{\partial X_n}\right\}\right]$$
$$[\nabla \sigma_x^*]=\left[\left\{\frac{\partial \sigma^*}{\partial X_1}\right\},\ldots,\left\{\frac{\partial \sigma^*}{\partial X_n}\right\}\right] \quad (2.81)$$

Similar, dezvoltarea în serie Taylor în funcție de $\{Y\}$ în jurul punctului $\{Y^*\}$ dă

$$\{u\}\approx\{u^*\}+[\nabla u_y^*](\{Y\}-\{Y^*\})$$
$$\{\sigma\}\approx[\sigma^*]+[\nabla \sigma_y^*](\{Y\}-\{Y^*\}) \quad (2.82)$$

unde

$$[\nabla u_y^*]=\left[\left\{\frac{\partial u^*}{\partial Y_1}\right\},\ldots,\left\{\frac{\partial u^*}{\partial Y_n}\right\}\right]$$
$$[\nabla \sigma_y^*]=\left[\left\{\frac{\partial \sigma^*}{\partial Y_1}\right\},\ldots,\left\{\frac{\partial \sigma^*}{\partial Y_n}\right\}\right]=[S][\nabla u_y^*] \quad (2.83)$$

Se poate arăta că

$$[\nabla u_y^*]\{Y^*\}=\{u^*\}$$
$$[\nabla \sigma_y^*]\{Y^*\}=\{\sigma^*\} \quad (2.84)$$

iar ecuațiile (2.82) devin

$$\{u\}\approx[\nabla u_y^*]\{Y\}$$
$$\{\sigma\}\approx[\nabla \sigma_y^*]\{Y\} \quad (2.85)$$

Aproximațiile liniare din ecuațiile (2.85) dau valorile exacte ale lui $\{u\}$ și $\{\sigma\}$ în $\{Y^*\}$.

În multe metode ale criteriului de optimalitate se aproximează că eforturile unitare în pasul de reanalizare sînt constante. Aceasta este echivalent cu presupunerea că elementele matricei B sînt constante

$$[B]=[B^*] \quad (2.86)$$

Se poate arăta ca $[\partial B^*/\partial Y_i]\{Y^*\}=\{0\}$ pentru $i=1, \ldots, n$ și prin diferențierea relației (2.75) în raport cu $\{Y\}$ se obține

$$[\nabla u_y^*]=[B^*] \quad (2.87)$$

Aproximarea cu eforturi unitare constante conduce la

$$\{u\}=[B^*]\{Y\}=[\nabla u_y^*]\{Y\} \quad (2.88)$$

Comparînd (2.87) cu (2.79) rezultă că dezvoltarea în serie Taylor pentru variabilele reciproce este echivalentă cu considerarea eforturilor unitare constante. Relația (2.86) este adecvată acolo unde solicitările au o dependență slabă în funcție de variabilele de proiectare.

c) **Condiții de optimalitate**

Se consideră un punct dat în care J restricții sînt active

$$g_j(\{X\})=0 \quad j=1, \ldots, J \quad (2.89)$$

Se definește funcția Lagrange

$$\Phi(\{X\},\{\lambda\})=F(\{X\})+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j g_j(\{X\}) \quad (2.90)$$

în care λ_j sînt multiplicatorii Lagrange. La optim, trebuie satisfăcute următoarele condiții :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}=0 \quad i=1,\ldots,n \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j}=0 \quad j=1,\ldots,J \tag{2.91}$$

Pentru a testa dacă punctul $\{X^*\}$ este optim, se utilizează condițiile Kuhn-Tucker

$$\{\nabla F\}+[\nabla g]\{\lambda\}=\{0\}, \quad \{\lambda\}\geq\{0\} \tag{2.92}$$

unde $\{\lambda\}^T=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_J\}$, $[\nabla F]$ este vectorul gradient a lui F, iar $[\nabla g]$ este matricea derivatelor

$$\{\nabla F\}=\begin{Bmatrix}\partial F/\partial X_1\\ \vdots\\ \partial F/\partial X_n\end{Bmatrix}, \quad [\nabla g]=[\{\nabla g_1\},\ldots,\{\nabla g_J\}] \tag{2.93}$$

d) **Relația de recurență**

Următoarea relație de recurență este utilizată în mod obișnuit în pasul de reproiectare pentru modificarea variabilelor de proiectare $X_i^{(k)}$ în ciclul k de iterație

$$\begin{aligned} X_i^{(k+1)}&=G_i^{(k)}X_i^{(k)} \text{ dacă } X_i^L\leq G_i^{(k)}X_i^{(k)}\\ X_i^{(k+1)}&=X_i^L \text{ dacă } X_i^L\geq G_i^{(k)}\end{aligned} \tag{2.94}$$

unde $G_i^{(k)}$ este un multiplicator calculat în metoda criteriului de optimalitate pentru fiecare variabilă de proiectare și pe care se bazează unele criterii sau condiții necesare privind eforturile unitare sau deplasările.

Utilizînd relațiile (2.94), inegalitățile $\{X^L\}\leq\{X\}$ au fost separate de restricțiile de comportare. În consecință, atunci cînd se utilizează condițiile Kuhn-Tucker se vor considera numai ultimele restricții printre cele J active.

2.2.2. Proiectarea de egală rezistență

Proiectarea de egală rezistență se bazează pe presupunerea că într-o structură optimă în fiecare element există eforturi unitare admisibile în cel puțin un caz de încărcare. Similar metodelor criteriului de optimalitate această proiectare se bazează, de asemeni, pe o analiză iterativă. Dacă analiza arată că într-un anumit element există un efort unitar superior celui admisibil în cazul de încărcare critic, regula de reproiectare crește secțiunea elementului astfel încît efortul unitar să descrească. În mod invers se petrec lucrurile dacă elementul este subtensionat. Deoarece modificările dimensiunilor elementelor în structurile static nedeterminate vor schimba distribuția solicitărilor în elemente, sînt necesare cîteva cicluri în analiza iterativă pentru a obține soluția de egală rezistență. În multe structuri solicitările elementelor sînt afectate puțin de variația relativă a dimensiunilor altor elemente, deci procesul iterativ converge rapid. Structurile avînd așa numita acțiune hibridă convergența poate fi lentă. Pentru acest tip de structuri, printr-o analiză repetată și reanaliză se pot elimina unele elemente din proiectarea inițială pentru obținerea unei topologii simple. În problemele de proiectare de egală rezistență nu se consideră restricții de deplasare și dacă se ține cont de eventuale limite ale dimensiunilor atunci elementele afectate de aceste limitări pot să nu fie de egală rezistență. Această metodă (în limba engleză „Fully Stressed Design") are următoarele avantaje :

Scanned with OKEN Scanner

1. Experiența inginerească arată că o bună proiectare este, adesea, aceea în care în fiecare element există eforturile unitare admisibile.

2. Proiectarea de egală rezistență se demonstrează că este optimă numai în anumite situații.

3. Proiectarea de egală rezistență este relativ eficientă comparativ cu multe metode de programare matematică.

4. O proiectare de egală rezistență este adesea un bun punct de plecare în procedeele bazate pe programarea matematică.

În proiectarea de egală rezistență nu se face nici o referire explicită la vreo funcție obiectiv. S-a demonstrat de mult timp că pentru o structură static determinată avînd o singură condiție de încărcare proiectarea de egală rezistență este echivalentă cu proiectarea la greutatea minimă. Această considerație nu este însă valabilă pentru structurile static nedeterminate cu mai multe condiții de încărcare.

O explicație este faptul că proiectarea de egală rezistență nu este unică. O structură nedeterminată poate avea mai multe soluții de egală rezistență și nu avem nici o siguranță că un algoritm de calcul pentru această rezolvare va converge la soluția de greutate minimă. În multe cazuri se poate găsi o proiectare de egală rezistență a cărei optimalitate în raport cu greutatea poate fi găsită. Întrebarea dacă o proiectare de egală rezistență este o proiectare optimă sau nu se poate rezolva cu ajutorul condițiilor Kuhn-Tucker. În unele cazuri proiectarea de egală rezistență poate fi mai dificilă decît proiectarea la greutatea minimă iar în alte cazuri ea poate să nu existe. Nu există nici o regulă, aparent, pentru a diferenția aceste cazuri, exceptînd o examinare ad hoc.

Utilizînd metoda de reanaliză a *raportului eforturilor unitare*, convergența, în cazul structurilor static determinate, apare într-un singur pas. Numărul de iterații cerut pentru convergență în cazul structurilor static nedeterminate nu este legat, în general, de numărul de variabile ale problemei. Fiecare pas de reproiectare este simplu și faptul că nu se găsește o structură de greutate minimă este mai puțin important, adesea, comparativ cu ușurința cu care este obținută o îmbunătățire a proiectării.

Nu există un algoritm care să fie cel mai bun pentru proiectarea de egală rezistență. Se vor analiza în cele ce urmează unele procedee de calcul.

a) **Aproximații de prim ordin**

Utilizînd aproximația de prim ordin din ecuația (2.80), eforturile unitare în ciclul $(k+1)$ sînt date de

$$\{\sigma^{(k+1)}\} \approx \{\sigma^{(k)}\} + [\nabla \sigma_{\sigma}^{(k)}](\{X^{(k+1)}\} - \{X^{(k)}\}) \tag{2.95}$$

unde $\{X^{(k)}\}$, $\{\sigma^{(k)}\}$, și $[\nabla \sigma_{\sigma}^{(k)}]$ sînt valorile date în punctul de proiectare k.

În cazul cînd obiectivul este, găsirea unei noi proiectări în care eforturile unitare $\{\sigma^{(k+1)}\}$ vor fi egale cu eforturile unitare admisibile $\{\sigma\}$, ecuația (2.95) devine

$$\{\sigma^{s}\} \approx \{\sigma^{(k)}\} + [\nabla \sigma_{\sigma}^{(k)}](\{X^{(k+1)}\} - \{X^{(k)}\}) \tag{2.96}$$

Aproximațiile de prim ordin se pot reprezenta prin planul tangent la suprafața impusă de restricții. $\{X^{(k+1)}\}$ pot fi calculate prin rezolvarea sistemului de ecuații (2.96). Acest procedeu implică următoarele probleme posibile :

1) Poate apare divergența atunci cînd $\{X^{(k)}\}$ este o estimare îndepărtată a soluției exacte ;

2) În general, restricțiile de eforturi unitare care sînt active la optim, nu sînt cunoscute a priori ;

3) Trebuie calculată matricea derivatelor parțiale $[\nabla\sigma_m^{(k)}]$;
4) Procedeul cere rezolvarea unui sistem de ecuații liniare.

Pentru o modificare a unei singure variabile de proiectare, X_i, ecuația (2.96) devine

$$\{\sigma^s\}\approx\{\sigma^{(k)}\}+\left\{\frac{\partial\sigma^{(k)}}{\partial X_i}\right\}(X_i^{(k+1)}-X_i^{(k)}) \tag{2.97}$$

și $X_i^{(k+1)}$ se poate calcula pentru orice efort unitar specificat σ_h cu

$$X_i^{(k+1)}=X_i^{(k)}+\frac{\sigma_h^s-\sigma_h^{(k)}}{\left(\frac{\partial\sigma_h}{\partial X_i}\right)^{(k)}} \tag{2.98}$$

Efortul unitar critic este acel pentru care $X_i^{(k+1)}$ este cel mai mare.

În detaliu, efortul unitar σ_h este exprimat prin

$$\sigma_h=\frac{F_h}{X_h}=F_hY_h \tag{2.99}$$

unde F_h este forța axială iar Y_h variabila reciprocă. Derivata parțială a lui σ_h în raport cu X_i este

$$\frac{\partial\sigma_h}{\partial X_i}=-\frac{F_h}{X_i^2}\delta_{ih}+\frac{1}{X_h}\frac{\partial F_h}{\partial X_i}=F_h\frac{\partial Y_h}{\partial X_i}\delta_{ih}+Y_h\frac{\partial F_h}{\partial X_i} \tag{2.100}$$

unde δ_{ih} este simbolul Kronecker

$$\delta_{jh}=\begin{cases}1 & \text{dacă } i=h\\ 0 & \text{dacă } i\neq h\end{cases} \tag{2.101}$$

Ecuația (2.100) arată că modificarea efortului unitar într-un element apare din două surse: a) o variație a secțiunii elementului pentru forță constantă; b) o variație a distribuției forței pentru secțiune constantă a elementului. Dacă structura este static determinată $\partial F_h/\partial X_i=\partial F_h/\partial Y_i=0$.

Se poate arăta că, în general, pentru $i\neq h$ variația în σ_h se datorește numai redistribuției forței. Ecuația (2.100) arată că redistribuția forței este considerată în aproximația de prim ordin (2.98) prin derivatele efortului unitar. Dacă se neglijează efectul redistribuției forței datorită variației în X_i, $\partial F_h/\partial X_i=0$. Considerînd variabilele reciproce $X_i=Y_i$, $\partial Y_i/\partial X_i=1$. Atunci pentru $i\neq h$, eforturile unitare rămîn constante în timp ce pentru $i=h$, ecuația (2.100) poate fi scrisă pentru ciclul k

$$\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial X_i}\right)^{(k)}=F_i^{(k)} \tag{2.102}$$

Substituind (2.102) în (2.98), pentru $i=h$ avem

$$X_i^{(k+1)}=X_i^{(k)}+\frac{\sigma_i^s-\sigma_i^{(k)}}{F_i^{(k)}} \tag{2.103}$$

Substituind $Y_i^{(k)}=X_i^{(k)}$ și $F_i^{(k)}Y_i^{(k)}=\sigma_i^{(k)}$, (2.103) devine

$$Y_i^{(k+1)}=\frac{\sigma_i^s}{F_i^{(k)}} \tag{2.104}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (2.104) este echivalentă cu procedeul raportului eforturilor unitare. Aceasta indică faptul că procedeul raportului eforturilor unitare este echivalent cu utilizarea relației (2.98), dacă în aceasta redistribuția de forțe este neglijată iar variabilele de proiectare sînt variabilele reciproce ale elementului, Y_i.

b) **Aproximații de ordinul zero** (Procedeul raportului eforturilor unitare)

Utilizînd procedeul raportului eforturilor unitare, nu se consideră influența redistribuirii forțelor în structură asupra eforturilor unitare într-un element dat. Variabila de proiectare în ciclul $(k+1)$, $X_i^{(k+1)}$ este

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma_i^s} \tag{2.105}$$

Această relație este de forma (2.94) cu $G_i^{(k)} = \sigma_i^{(k)}/\sigma_i^s$. Procedeul raportului eforturilor unitare constă, deci într-o analiză ciclică, în care rezultatele ciclului k sînt utilizate pentru redimensionarea elementelor în scopul atingerii stării de egală rezistență. Secțiunile elementelor cresc sau descresc în funcție de raportul dintre efortul unitar calculat și efortul unitar admisibil. Pentru toate condițiile de încărcare trebuie să fie considerat numai cel mai mare raport al eforturilor (critic) pentru un element i. Dimensiunile calculate sînt utilizate în ciclul următor de calcul. Procesul continuă pînă la convergență, dacă ea există. Dacă $\{X^{(k+1)}\}$ și $\{X^{(k)}\}$ sînt pe linia de scară atunci convergența relației (2.105) este asigurată. Forța dintr-un element, $F_i^{(k)}$, este dată de

$$F_i^k = X_i^k \sigma_i^k \tag{2.106}$$

Substituind (2.106) în (2.105), $X_i^{(k+1)}$ se calculează din

$$X_i^{(k+1)} = \frac{F_i^{(k)}}{\sigma_i^s} \tag{2.107}$$

Aceasta este noua variabilă de proiectare ce rezultă din raportul dintre forța critică din element calculată și efortul unitar admisibil.

Din punct de vedere geometric, ecuația (2.105) arată că suprafața impusă de restricții este aproximată printr-un plan normal la axa i în spațiul de proiectare. O astfel de aproximare este denumită de ordin zero. Creșterea rigidității unui element conduce la o forță (solicitare) mai mare în aceasta. Astfel, poate fi rațional să se mărească (sau să se reducă) X_i printr-un factor care este mai mare (sau mai mic) decît raportul eforturilor unitare. Pentru îmbunătățirea convergenței, se utilizează un factor de „supra relaxare", v, mai mare decît unitatea în (2.105).

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} \left(\frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma_i^s} \right) v > 1 \tag{2.108}$$

Altă schemă se bazează pe extrapolarea pătratică a lui Melosh. Cînd procesul iterativ s-a stabilizat, adică restricția activă pentru un element nu se modifică în trei cicluri succesive cu variabilele de proiectare $X_i^{(k)}$, $X_i^{(k+1)}$ și $X_i^{(k+1)}$, se formează o expresie pătratică obținîndu-se variabila de extrapolare $X_i^{(k+3)}$

$$X_i^{(k+3)} = X_i^{(k+1)} + 2 \frac{(X_i^{(k)} - X_i^{(k+1)})(X_i^{(k+2)} - X_i^{(k+1)})}{X_i^{(k)} - 2X_i^{(k+i)} + X_i^{(k+1)}} \tag{2.109}$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod similar se pot utiliza și alte scheme de extrapolare. V.B. Venkayya a propus un algoritm iterativ bazat pe criteriul energiei de deformație. Criteriul de optimalitate utilizat este următorul: *„O proiectare optimă este aceia pentru care energia de deformație a fiecărui element păstrează un raport constant față de întreaga lui capacitate energetică"*.

Capacitatea energetică este definită ca fiind energia totală de deformație, în cazul cînd în întreg elementul există numai eforturi unitare normale limită. Eforturile unitare normale limită pot fi diferite de eforturile unitare reale limită dar acestea din urmă nu pot fi depășite. Rezultă: capacitatea energetică este independentă de starea reală de eforturi unitare în element și depinde numai de volum și de eforturile unitare normale limită din element. Dimensiunea pasului iterației, bazată pe criteriul energetic, variază cu mărimea efortului unitar normal limită. Capacitatea energetică se determină în același mod pentru bare, plăci, grinzi, sau alt element structural. Atunci, cînd condițiile de proiectare sînt aceleași, criteriile de optimalitate diferă numai printr-un factor de scară. Capacitatea energetică a elementului i este dată de

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\sigma_i^{(n)}\varepsilon_i^{(n)}V_i \tag{2.110}$$

unde $\sigma_i^{(n)}$ și $\varepsilon_i^{(n)}$ sînt respectiv eforturile unitare normale limită și deformațiile iar V_i este volumul elementului. Considerînd materialul liniar elastic, relația între eforturile unitare normale limită și deformații este

$$\sigma_i^{(n)} = E_i\varepsilon_i^{(n)} \tag{2.111}$$

Substituind relația (2.111) în (2.110) se obține pentru capacitatea energetică forma

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(\varepsilon_i^{(n)})^2\lambda\bar{X}_i l_i \tag{2.112}$$

unde

$$l_i = \frac{V_i E_i}{\lambda\bar{X}_i} \tag{2.113}$$

Scalarul λ este un parametru de bază pentru toate elementele iar $\bar{X}_i$ este valoarea realativă a variabilei de proiectare i. În cazul elementelor în formă de bară l_i este lungimea elementului iar $\lambda\bar{X}_i$ este produsul dintre suprafața secțiunii transversale și modulul de elasticitate (rigiditatea la forță axială). Vectorul de proiectare real este $\lambda\{\bar{X}\}$. Vectorul $\{\bar{X}\}$ este denumit vector de proiectare relativ sau vector normalizat. Scalarul λ este denumit factor de normalizare. Răspunsul relativ al structurii depinde de vectorul $\{\bar{X}\}$ iar răspunsul absolut este modificat prin variația scalarului λ.

Energia de deformație a elementului în funcție de forța generalizată și deplasarea relativă corespunzătoare este următoarea

$$e_i = \frac{1}{2\lambda}\{S_i\}^T\{u_i'\} \tag{2.114}$$

Vectorul de deplasare real este

$$\{u_i'\} = \lambda\{u_i\} \tag{2.115}$$

Scanned with OKEN Scanner

Corespunzător criteriului de optimalitate energia de deformație a fiecărui element trebuie să păstreze un raport constant în raport cu întreaga capacitate energetică.

Relațiile (2.112), (2.114) și criteriul de optimalitate dau

$$\lambda^2 = C^2 \frac{e_i'}{\mathcal{E}_i'} \tag{2.116}$$

unde C este o constantă de proporționalitate, e_i și $\mathcal{E}_i'$ fiind date de

$$e_i' = \frac{1}{2}\{S'\}^T\{u_i'\}\,; \qquad \mathcal{E}_i' = \frac{1}{2}(\varepsilon_i^{(n)})^2 \bar{X}_i l_i \tag{2.117}$$

Multiplicînd ambii membri ai ecuației (2.116) cu $\bar{X}_i^2$ rezultă

$$\bar{X}_i\lambda = C\bar{X}_i\left[\frac{e_i'}{\mathcal{E}_i'}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.118}$$

unde $\bar{X}_i\lambda$ este variabila de proiectare i. Forma relației (2.118) sugerează următoarea relație de recurență pentru determinarea variabilei de proiectare în fiecare ciclu.

$$(\bar{X}_i\lambda)^{(k+1)} = C(\bar{X}_i)^{(k)}\left[\left(\frac{e_i'}{\mathcal{E}_i'}\right)^{(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.119}$$

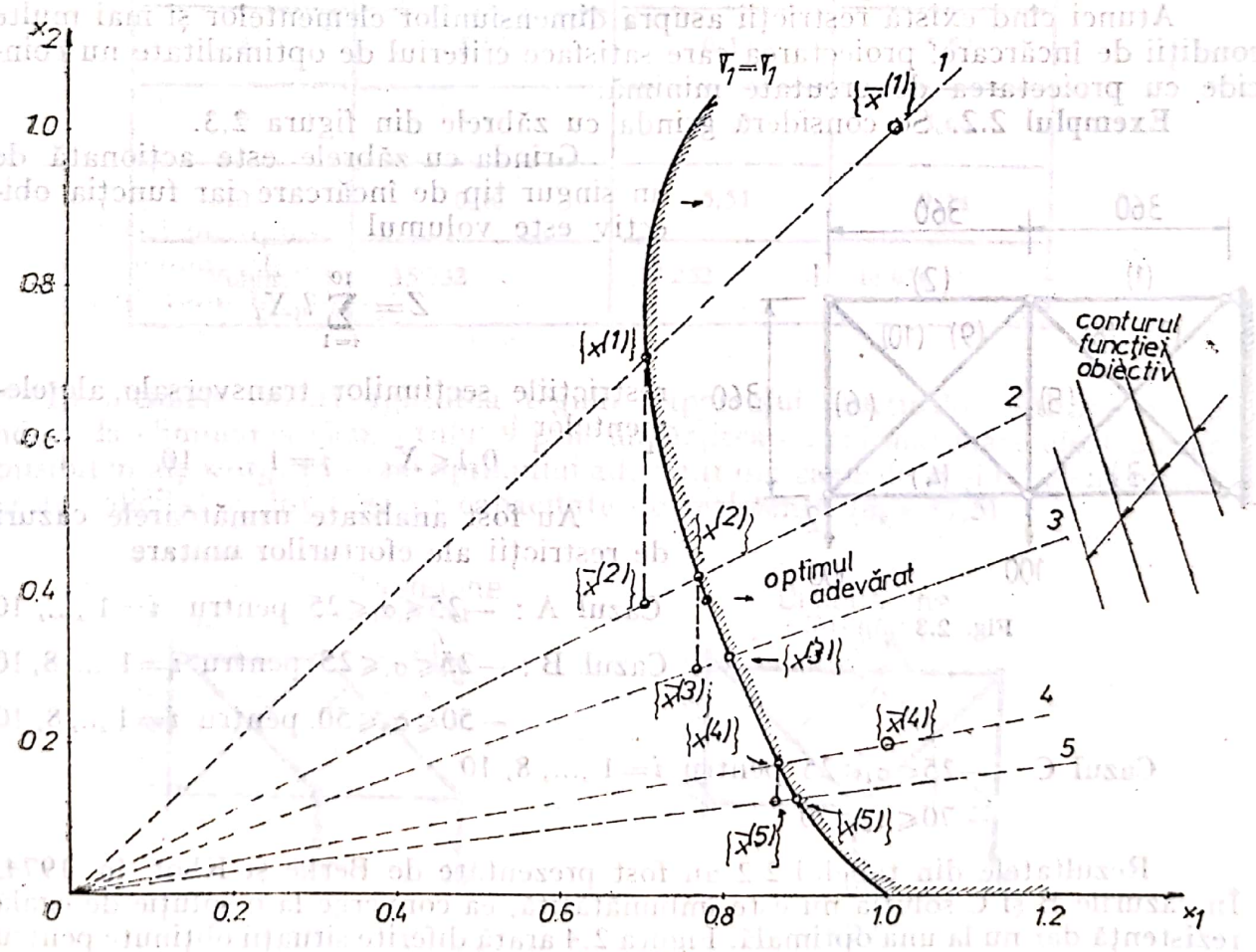


Fig. 2.2

Cînd se impun în proiectare mai multe cazuri de încărcare, ecuația (2.119) se modifică în modul următor

$$(\bar{X}_i\lambda)^{(k+1)}=C(\bar{X}_i)^{(k)}\left[\left(\frac{e'_{i\max}}{e'_i}\right)^{(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.120}$$

Aici, $e'_{i\max}$ este mărimea energiei de deformație maximă a elementului i datorită condițiilor de încărcare.

Utilizarea relației de recurență (2.120) și limitele aplicării ei sînt explicate în figura 2.2 în spațiul a două variabile de proiectare.

Liniile 0—1, ..., 0—5 sînt denumite linii de proiectare. Punctele de pe o linie de proiectare dată au același vector relativ $\{\bar{X}\}$. Mișcarea pe această linie implică modificarea valorii scalarului λ. Pe o astfel de linie, de exemplu 0—1, punctul $\{X^{(1)}\}$ care se află la intersecția liniei 0—1 cu curba impusă de restricția dată, reprezintă proiectarea admisibilă de greutate minimă. Pentru a localiza acest punct, structura este mai întîi analizată cu vectorul de proiectare relativ liniei 0—1.

Pentru obținerea răspunsului relativ al restricției active și a scalarului λ corespunzător punctului $\{X^{(1)}\}$ se procedează în modul următor : dacă efortul unitar în $\{\bar{X}^{(1)}\}$ este $\bar{\sigma}$, valoarea scalarului λ se calculează cu $\bar{\sigma}/\sigma^s$ iar $\{X^{(1)}\}$ este dat de $\{X^{(1)}=\lambda\{X^{(1)}\}$ (ec. 2.78). În fiecare ciclu raportul λ este calculat pentru fiecare restricție și se selectează valoarea cea mai mare corespunzătoare restricției celei mai critice. Utilizînd relația de recurență (2.120) se poate construi apoi un algoritm eficient de optimizare.

Atunci cînd există restricții asupra dimensiunilor elementelor și mai multe condiții de încărcare, proiectarea care satisface criteriul de optimalitate nu coincide cu proiectarea de greutate minimă.

Exemplul 2.2. Se consideră grinda cu zăbrele din figura 2.3.

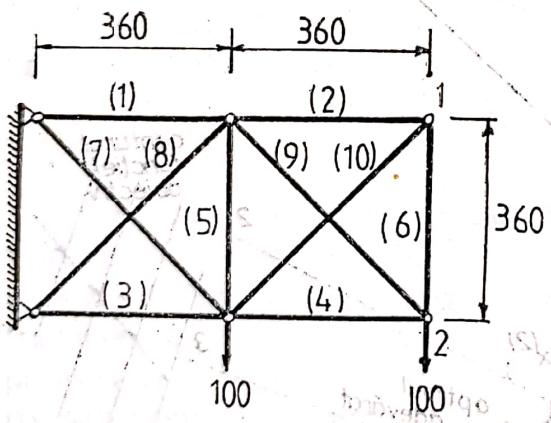


Fig. 2.3

Grinda cu zăbrele este acționată de un singur tip de încărcare iar funcția obiectiv este volumul

$$Z=\sum_{i=1}^{10} l_iX_i$$

restricțiile secțiunilor transversale ale elementelor

$$0{,}1\leqslant X_i \qquad i=1\ ,...,\ 10$$

Au fost analizate următoarele cazuri de restricții ale eforturilor unitare

Cazul A : $-25\leqslant\sigma_i\leqslant 25$ pentru $i=1\ ,...,\ 10$

Cazul B : $-25\leqslant\sigma_i\leqslant 25$ pentru $i=1\ ,...,\ 8,\ 10$

$-50\leqslant\sigma_9\leqslant 50$ pentru $i=1\ ,..,\ 8,\ 10$

Cazul C : $-25\leqslant\sigma_i\leqslant 25$ pentru $i=1\ ,...,\ 8,\ 10$

$-70\leqslant\sigma_9\leqslant 70$

Rezultatele din tabelul 2.2 au fost prezentate de Berke și Khot în 1974. În cazurile B și C soluția nu este îmbunătățită, ea converge la o soluție de egală rezistență dar nu la una optimală. Figura 2.4 arată diferite situații obținute pentru cazurile A, B și C.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 2.2

Element	Suprafețele secțiunilor transversale		
	Cazul A	Cazurile B și C	
	Proiect. de egală rezist. și optimul	Proiect. egală rezistență	Optimul adevărat
1	7,94	4,11	7,90
2	0,10	3,89	0,10
3	8,06	11,89	8,10
4	3,94	0,11	3,90
5	0,10	0,10	0,10
6	0,10	3,89	0,10
7	5,74	11,16	5,80
8	5,57	0,15	5,51
9	5,57	0,10	3,68
10	0,10	5,51	0,14
Volum	15 932	17 252	14 976

În ultimele cazuri aplicarea regulii raportului eforturilor unitare poate conduce la eliminarea elementului 9 prin împărțirea cu cel mai mare efort unitar admisibil în algoritm. În cazul optimului adevărat din cazurile *B* și *C*, elementul 9 nu este solicitat la întreaga sa capacitate de rezistență ($\sigma_9 = 37{,}5$).

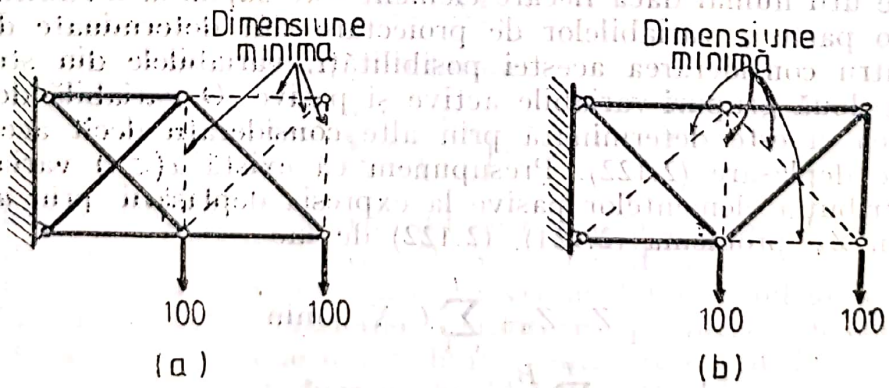


Fig. 2.4

2.2.3. Proiectarea optimă cu restricții de deplasare

Procedeele de proiectare de egală rezistență pot fi utilizate numai în problemele cu restricții asupra eforturilor unitare și secțiunilor transversale ale elementelor. În acest subcapitol se extinde studiul precedent la cazul restricțiilor de deplasare.

a) **Criteriul pentru o singură restricție de deplasare**

Se consideră o structură supusă la o singură condiție de încărcare.

Scopul problemei este de a deduce criteriul de optimalitate care trebuie să fie satisfăcut în cazul unei singure restricții, egalitate, de deplasare $u=u_s$. În acest caz problema (2.70)—(2.73) devine: să se găsească $\{X\}^T=\{X_1,\ldots,X_n\}$ astfel încît

$$Z=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \to \min \tag{2.121}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{X_i} = u^s \tag{2.122}$$

Indicele j nu este necesar deoarece există o singură restricție.

Bazîndu-ne pe relația (2.90), se definește funcția lui Lagrange

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{X_i}-u^s\right) \tag{2.123}$$

Pentru optim trebuie satisfăcute următoarele condiții

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_h}=C_h-\lambda \frac{B_h}{X_h^2}+\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} \frac{\partial B_i}{\partial X_h}=0 \tag{2.124}$$

Într-o structură static nedeterminată mărimile B_i sînt funcții de toate variabilele de proiectare deoarece forțele F_i depind de dimensiunile elementelor. Cum s-a arătat, bazat pe principiul lucrului mecanic virtual, ultimul termen din ecuația (2.124) este identic egal cu zero, deci

$$C_h-\lambda \frac{B_h}{X_h^2}=0\,; \quad h=1,\ldots,n \tag{2.125}$$

Ecuația precedentă este verificată la optim iar raportul $C_h X_h^2/B_h$ este același pentru fiecare variabilă de proiectare. Sub această formă, criteriul de optimalitate este util numai dacă fiecare element este supus la modificări. În general, numai o parte a variabilelor de proiectare sînt determinate de restricția (2.122). Pentru considerarea acestei posibilități, variabilele din structură sînt împărțite în două grupuri-variabile active și pasive. O variabilă devine pasivă dacă valoarea ei este determinată prin alte considerații decît acelea asociate restricției de deplasare (2.122). Presupunem că există $I(\leqslant n)$ variabile active. Notînd contribuția elementelor pasive la expresia deplasării prin u_0 și funcția obiectiv prin Z_0, problema (2.121), (2.122) devine

$$Z=Z_0+\sum_{i=1}^{I} C_i X_i \to \min \tag{2.126}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{B_i}{X_i} = u^s-u_0 \equiv u^* \tag{2.127}$$

Ecuația (2.125) poate fi rescrisă în forma

$$X_h = \sqrt{\lambda}\sqrt{B_h|C_h} \tag{2.128}$$

Substituind ecuația (2.128) în (2.127) pentru variabilele $h=i=1,...,I$ rezultă valoarea

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{u^*}\sum_{i=1}^{I}\sqrt{B_i C_i} \tag{2.129}$$

$\left(\text{se poate arăta că } \lambda = Z^*/u^* \text{ unde } Z^* = \sum_{i=1}^{I} C_i X_i\right)$. Substituind (2.129) în (2.128) se obține

$$X_h = \frac{1}{u^*}\sqrt{B_h|C_h}\sum_{i=1}^{1}\sqrt{B_i C_i} \quad h=1,...,I \tag{2.130}$$

Relația (2.130) reprezintă criteriul care trebuie să fie satisfăcut pentru optimul problemei (2.70)—(2.73).

b) **Criteriul pentru restricții de deplasare multiple**

Restricții de deplasare multiple pot apare sau în cazul unor condiții multiple de încărcare sau în cazul unor restricții active multiple pentru o singură condiție de încărcare. Criteriul de optimalitate în) cazul restricțiilor de deplasare multiple a fost dedus de Berke și Khot.

Se consideră următoarea problemă de proiectare optimă cu J restricții egalitate de deplasare și I elemente active: să se găsească $\{X\}^T=\{X_1,...,X_I\}$ astfel încît

$$Z = Z_0 + \sum_{i=1}^{I} C_i X_i \to \min \tag{2.131}$$

$$\sum_{i=1}^{I}\frac{B_{ji}}{X_i} - u_j^* = 0,\ j=1,...,J \tag{2.132}$$

Funcția lui Lagrange este

$$\Phi = Z_0 + \sum_{i=1}^{I} C_i X_i + \sum_{j=1}^{J}\lambda_j\left(\sum_{j=1}^{J}\frac{B_{ji}}{X_i} - u_j^*\right) \tag{2.133}$$

iar condițiile necesare pentru optim sînt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_h} = C_h - \sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{B_{jh}}{X_h^2} = 0,\ h=1,...,J \tag{2.134}$$

Aceste condiții se pot rescrie sub forma

$$X_h^2 = \sum_{j=1}^{J}\lambda_j\left(\frac{B_{jh}}{C_h}\right),\quad h=1,...,J \tag{2.135}$$

Ecuațiile (2.135) reprezintă criteriul de optimalitate care trebuie satisfăcut pentru rezolvarea problemei (2.131), (2.132). Semnificația acestor condiții este aceea că într-o structură optimă pătratul vectorului variabilelor de proiectare este o combinație liniară a mărimilor definite de paranteze cu coeficienții λ_j.

Se va reformula criteriul de optimalitate pentru restricții de deplasare utilizînd formularea matricială a metodei deplasărilor. Deplasarea u_j se poate exprima astfel

$$u_j = \{u\}^T \{Q_j\} \tag{2.136}$$

unde $\{Q_j\}$ este vectorul încărcării virtuale avînd valoarea unitară în punctul de acționare j și zero în toate celelalte puncte iar $\{u\}$ este vectorul deplasărilor datorită încărcărilor reale $\{P\}$. Vectorul deplasare virtuală $\{u_j^Q\}$, corespunzător vectorului încărcare virtuală $\{Q_j\}$ este dat de

$$[K]\{u_j^Q\} = \{Q_j\} \tag{2.137}$$

unde $[K]$ este matricea de rigiditate a sistemului. Substituind (2.137) în (2.136) avem

$$u_j = \{u\}^T [K] \{u_j^Q\} \tag{2.138}$$

Restricțiile egalitate de deplasare sînt

$$\{u\}^T [K] \{u_j^Q\} = u_j^s \quad j = 1, \ldots, J \tag{2.139}$$

iar funcția Lagrange

$$\Phi = Z_0 + \sum_{i=1}^{I} C_i X_i + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j (\{u\}^T [K] \{u_j^Q\} - u_j^s) \tag{2.140}$$

Condițiile ce trebuie satisfăcute la optim sînt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_h} = C_h + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \left\{\frac{\partial u}{\partial X_h}\right\}^T [K] \{u_j^Q\} = 0 \quad h = 1, \ldots, I \tag{2.141}$$

Ecuația (2.141) se bazează pe presupunerea că $[K]\{u_j^Q\} = \{Q_j\}$ sînt vectori constanți $\{\partial u / \partial X_h\}^T$ se pot calcula prin mai multe metode. Una dintre ele constă în derivarea ecuației

$$\{u\}^T [K] = \{P\}^T$$

Rezultatul este

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial X_h}\right\}^T = -\{u\}^T \left[\frac{\partial K}{\partial X_h}\right] [K]^{-1} \tag{2.142}$$

Pentru calculul $[\partial K / \partial X_h]$ se va considera numai matricea de rigiditate a elementului h, $[K]_h$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial X_h}\right\}^T = -\{u\}^T \left[\frac{\partial K_h}{\partial X_h}\right] [K]^{-1} \tag{2.143}$$

Substituind (2.143) în (2.141) se obține

$$C_h - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \{u\}^T \left[\frac{\partial K_h}{\partial X_h}\right] \{u_j^Q\} = 0 \quad h = 1, \ldots, I \tag{2.144}$$

Se face remarca că trebuie considerate numai acele elemente din $\{u\}$ și $\{u_j^Q\}$ asociate gradului de libertate al elementului h. Se consideră cazul cînd $[K]_h$ este o funcție liniară de X_h

$$\left[\frac{\partial K_h}{\partial X_h}\right] = \frac{1}{X_h} [K]_h \tag{2.145}$$

Criteriul de optimalitate din (2.144) devine

$$C_h - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \frac{1}{X_h} \{u\}^T [K]_h \{u_j^Q\} = 0, \quad h = 1, \ldots, I \tag{2.146}$$

și după rearanjare

$$X_h = \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{\lambda_j}{C_h} \{u\}^T [K]_h \{u_j^Q\} \right) \tag{2.147}$$

Acestea sînt criteriile de optimalitate care trebuie satisfăcute la optim. Se poate arăta că criteriul (2.147) este echivalent cu (2.135).

Principalul avantaj al utilizării metodei deplasărilor este cel al comodității de calcul. Produsul $[u]^T[K]_h\{u_j^Q\}$ poate fi calculat pentru diferite elemente într-un mod simplu. În cazul unei singure restricții egalitate de deplasare, (2.147) devine

$$X_h C_h = \lambda \{u\}^T [K]_h \{u_j^Q\} \tag{2.148}$$

Sumînd relația precedentă pentru toate elementele, eliminînd λ și substituind în (2.147) se obține

$$X_h = \frac{1}{C_h u^*} \{u\}^T [K]_h \{u_j^Q\} \sum_{i=1}^{I} C_i X_i, \quad h = 1,\ldots,I \tag{2.149}$$

c) Relații de recurență pentru reanaliză bazate pe considerații fizice

Aceste criterii de optimalitate sînt echivalente cu cel dat în (2.130)

Se consideră criteriul de optimalitate pentru o singură restricție de deplasare (2.130). Similar metodei raportului eforturilor unitare pentru proiectarea de egală rezistență, (2.130) se rescrie sub forma

$$X_h^{(k+1)} = \left(\frac{1}{u^*} \sqrt{B_h/C_h} \sum_{i=1}^{I} \sqrt{B_i C_i} \right)^{(k)} \quad h = 1,\ldots,I \tag{2.150}$$

unde indicele k indică ciclul de iterație. Procesul iterativ constă în aplicarea succesivă în analiza structurii a relației precedente. Aceasta se bazează pe presupunerea că elementele matricei $[B]$ sînt constante într-o iterație dată iar redistribuția solicitărilor nu este senzitivă la variații ale dimensiunilor elementelor. Aceasta este o relație de recurență intuitivă pentru modificarea variabilelor de proiectare ce satisface criteriul de optimalitate (2.130) și nu garantează convergența. Convergența depinde de redistribuția solicitării în timpul procesului de rezolvare.

În cazul restricțiilor de deplasare multiple, (2.150) se aplică separat fiecărei restricții și se selectează pentru proiectarea finală cea mai mare valoare a fiecărei variabile de proiectare. Extensia relației de recurență la multiple condiții de încărcare și restricții de deplasare se face în aceeași manieră ca în metoda raportului eforturilor unitare.

Cea mai mare variabilă de proiectare calculată cu relația (2.150) este obținută prin considerarea tuturor condițiilor de încărcare și a restricțiilor de deplasare. Dacă există N condiții de încărcare și J restricții de deplasare, X_h este calculat cu (2.150) pentru JN combinații. Acest procedeu propus de Gellatly și Berke este denumit *metoda de înfășurare*.

Deoarece metoda se bazează pe criteriul de optimalitate pentru o singură restricție (2.130), în mod obișnuit soluția nu satisface criteriul de optimalitate pentru restricții multiple (2.135). Însă, soluțiile obținute cu această metodă aproximativă sînt adesea foarte apropiate de cele obținute cu criteriul pentru restricții multiple.

Criteriul de optimalitate corect pentru restricții de deplasare multiple (2.135), se poate exprima prin următoarea relație de recurență

$$X_h^{(k+1)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{J} \left(\lambda_j \frac{B_{jh}}{C_h} \right)^{(k)}} \quad h = 1,\ldots,I \tag{2.151}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația de mai sus este similară cu (2.150) și poate fi utilizată la obținerea lui X_h. Însă, multiplicatorii λ_j nu pot fi eliminați și deci nu se pot obține expresii explicite pentru X_h. Soluția optimă satisface cele I condiții ale ecuației (2.135) și J restricții ale ecuației (2.132).

Acestea sînt $(I+J)$ ecuații neliniare cu I variabile necunoscute X_h și J multiplicatori Lagrange necunoscuți λ_j. Au fost propuse mai multe metode pentru rezolvarea acestei probleme. Dificultatea majoră comună tuturor metodelor este aceea că restricțiile care sînt active la optim nu sînt cunoscute dinainte. Astfel, metodele nu pot neglija restricțiile care sînt inactive la optim. Aceasta se poate realiza prin considerarea condițiilor necesare de optimalitate Kuhn-Tucker.

d) **Alegerea variabilelor pasive**

Diferite considerații pot afecta alegerea variabilelor pasive și există mai multe posibilități pentru divizarea variabilelor de proiectare în cele două grupuri : active și pasive. De exemplu, o variabilă poate deveni pasivă în raport cu criteriul de optimalitate de deplasare corespunzător dacă valoarea ei este determinată din alte considerații cum ar fi dimensiuni minime ale secțiunii transversale, eforturi unitare minime sau alte restricții de deplasare. Distincția între variabilele active și pasive permite stabilirea unui procedeu general iterativ pentru problemele cu multiple restricții de deplasare, de limitare a eforturilor unitare și a dimensiunilor secțiunilor transversale.

Un criteriu pentru alegerea elementelor pasive se obține prin examinarea relației (2.150). Dacă B_i este negativ pentru un element, atunci cerința de element activ $\sqrt{B_i C_i}$ introduce valori complexe inacceptabile.

Criteriul corespunzător pentru un element pasiv este

$$B_i < 0 \qquad (2.152)$$

Relația de mai sus arată că o reducere a deplasării apare mai curînd la o descreștere a dimensiunilor elementelor decît la o creștere a lor.

Aceasta înseamnă că dimensiunile elementelor vor fi determinate din alte restricții (eforturi unitare minime, dimensiuni minime ale secțiunilor transversale sau alte restricții de deplasare). În general, dacă pentru un element dimensiunea cerută pentru satisfacerea unei alte restricții este mai mare decît dimensiunea cerută pentru satisfacerea unei anumite restricții de deplasare, atunci elementul trebuie considerat pasiv cînd se utilizează relația (2.150).

În cazul general al restricțiilor multiple, grupul variabilelor pasive este diferit pentru fiecare restricție. Grupul se poate schimba de la o iterație la alta așa cum pentru unele variabile condiția critică se modifică de la o restricție la alta. Astfel, un element se poate redimensiona pe baza unei deplasări care nu a fost activă în precedenta iterație. Această modificare a restricțiilor active poate cauza dificultăți de convergență în proiectarea finală.

În discuția de mai sus a fost considerată o separare a priori a variabilelor în active și pasive. Dacă variabilele sînt separate, criteriul de optimalitate poate fi considerat ca o condiție necesară.

Altă abordare constă în neglijarea grupării variabilelor și obținerea unei soluții de proiectare alcătuită din valorile cele mai mari ale variabilelor din alte considerații. În utilizarea acestui procedeu toate variabilele se consideră active și pot fi modificate. Soluția finală nu va satisface criteriul de optimalitate. Întrucît nu sînt satisfăcute condițiile necesare și nici cele suficiente, această cale

Scanned with OKEN Scanner

este numai un procedeu pentru modificarea variabilelor de proiectare și obținerea unei soluții practice fără rigoare matematică.

2.3. Procedee generale iterative

Mai multe procedee iterative bazate pe condițiile Kuhn-Tucker au fost propuse (2.92). Caracteristica importantă a acestor metode este că ele converg la un optim local în timp ce metodele criteriului de optimalitate pot converge la soluții neoptime. Algoritmele utilizate implică două tipuri de aproximații, asociate cu :

1. relații de recurență pentru reproiectare ;
2. identificarea restricțiilor active la optim.

În faza de reproiectare se pot utiliza diferite relații pentru modificarea iterativă a variabilelor de proiectare $\{X\}$ și a multiplicatorilor Lagrange $\{\lambda\}$. Criteriul de optimalitate este utilizat pentru deducerea relației de recurență pentru modificarea variabilelor de proiectare iar restricțiile sînt utilizate pentru stabilirea relațiilor necesare pentru stabilirea multiplicatorilor Lagrange.

În general, restricțiile ce sînt active la optim nu sînt cunoscute dinainte. La fiecare iterație se caută sau se stabilește dacă este necesar un grup de restricții active. Deoarece multiplicatorii Lagrange trebuie să fie nenegativi la optim, restricțiile corespunzătoare multiplicatorilor negativi într-o iterație dată se pot elimina din grupul restricțiilor active.

2.3.1. Relații de recurență pentru variabilele de proiectare

Se consideră problema generală de proiectare cu J restricții active : să se găsească $\{X\}^T=\{X_1,...,X_n\}$ astfel încît

$$Z=Z(\{X\})\rightarrow\min \tag{2.153}$$

$$g_j(\{X\})=0, \quad j=1,...,J \tag{2.154}$$

Condițiile Kuhn-Tucker necesare pentru optimalitate sînt date de ecuațiile (2.92). Prima dintre ecuațiile (2.92) se poate scrie separat pentru fiecare variabilă X_i

$$\frac{\partial Z}{\partial X_i}+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial X_i}=0 \qquad i=1,...,n \tag{2.155}$$

Presupunînd $\partial Z/\partial X_i\neq 0$, rezultă

$$1=-\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial X_i}\Big/\frac{\partial Z}{\partial X_i} \qquad i=1,...,n \tag{2.156}$$

Numai în cazul restricțiilor de deplasare, ecuația (2.156) este echivalentă cu (2.135). Membrul drept al ecuației (2.156) se calculează într-un punct dat, astfel

$$T_i\equiv-\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial X_i}\Big/\frac{\partial Z}{\partial X_i} \quad i=1,...,n \tag{2.157}$$

La optim

$$T_i=1 \qquad i=1,...,n \tag{2.158}$$

Dacă pentru o soluție dată, grupul restricțiilor active este astfel încît valorile λ_j corespunzătoare sînt pozitive și ecuația (2.158) este satisfăcută, atunci soluția de proiectare are un optim local.

Din ecuația (2.158) se pot deduce mai multe relații de recurență pentru variabilele de proiectare. Multiplicînd ambii membri ai acestei ecuații cu X_i^β și luînd rădăcina de ordinul β rezultă

$$X_i=(T_i)^{1/\beta}X_i \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.159}$$

unde parametrul β determină dimensiunea pasului. Ecuația (2.159) se poate exprima sub forma următoarei relații de recurență

$$X_i^{(k+1)}=(T_i^{(k)})^{1/\beta}X_i^{(k)} \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.160}$$

care este denumită *relație de recurență exponențială*. Numai în cazul restricțiilor de deplasare și $\beta=2$, ecuația (2.160) este echivalentă cu (2.151).

Relația de recurență exponențială poate fi scrisă în forma ecuațiilor (2.94) unde $G_i^{(k)}=(T_i^{(k)})^{1/\beta}$. La optim $G_i^{(k)}=1$.

Altă posibilitate este multiplicarea ambilor membri ai ecuației (2.158) cu $(1-\alpha)X_i$

$$(1-\alpha)X_i=T_i(1-\alpha)X_i \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.161}$$

unde α este un *factor de relaxare* ce controlează dimensiunea pasului și variază astfel încît să poată fi îmbunătățită convergența.

Reordonînd ecuația (2.161) și scriind-o sub forma unei relații de recurență, rezultă

$$X_i^{(k+1)}=[\alpha+(1-\alpha)T_i^{(k)}]X_i^{(k)} \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.162}$$

Ecuația (2.162) este denumită *relație de recurență liniară*. Comparînd această relație cu (2.94) se poate vedea că $G_i^{(k)}=\alpha+(1-\alpha)T_i^{(k)}$.

Pentru a găsi o legătură între cele două relații de recurență, se rescrie (2.160) sub forma

$$X_i^{(k+1)}=[1+(T_i^{(k)}-1)]^{1/\beta}X_i^{(k)} \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.163}$$

Deoarece în vecinătatea optimului $(T_i^{(k)}-1)$ este mic în comparație cu 1, 0, (2.163) se poate aproxima printr-o dezvoltare binomială de prim ordin

$$X_i^{(k+1)}=\left[1+\frac{1}{\beta}(T_i^{(k)}-1)\right]X_i^{(k)} \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.164}$$

sau

$$X_i^{(k+1)}=\left[\left(1-\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta}T_i^{(k)}\right]X_i^{(k)} \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.165}$$

Din comparația ultimei ecuații cu (2.162) rezultă

$$\alpha=1-\frac{1}{\beta} \tag{2.166}$$

Astfel ecuația (2.162) apare ca o formă liniarizată a ecuației (2.160).

Criteriul de optimalitate (2.158) a fost dedus pentru o aproximație liniară a restricțiilor în vecinătatea punctului curent de proiectare.

Relațiile de recurență aproximative pentru reproiectare deduse din aceste criterii sînt în consecință juste numai într-o mică regiune în jurul acestui punct.

Scanned with OKEN Scanner

2.3.2. Relații de recurență pentru multiplicatorii Lagrange

În scopul utilizării relațiilor de recurență pentru X_i, trebuie să se determine multiplicatorii Lagrange. Se va arăta cum se pot utiliza relațiile de restricție pentru evaluarea multiplicatorilor Lagrange.

Se consideră, de exemplu, restricția activă de deplasare

$$u_j = u_j^s \tag{2.167}$$

Un studiu similar se utilizează pentru restricțiile eforturilor unitare.

Multiplicînd ambii membri ai ecuației (2.167) cu λ_j^δ și luînd rădăcina de ordinul δ rezultă

$$\lambda_j = \left(\frac{u_j}{u_j^s}\right)^{1/\delta} \lambda_j \tag{2.168}$$

unde δ este un parametru ce determină dimensiunea pasului. Ecuația de mai sus se poate pune sub următoarea formă recurentă

$$\lambda_j^{(k+1)} = \left(\frac{u_j}{u_j^s}\right)^{1/\delta} \lambda_j^{(k)} \tag{2.169}$$

Utilizarea relației exponențiale (2.169) exclude considerarea restricțiilor active. Restricțiile pasive se pot elimina automat prin egalarea cu zero a multiplicatorilor corespunzători. Deoarece cuplarea între restricții nu este considerată, ecuația (2.169) nu cere rezolvarea sistemului de ecuații pentru $\{\lambda\}$. Însă, acest lucru poate conduce la dificultăți de convergență în probleme ce au cuplaje puternice. O altă problemă ce apare în (2.169) este aceea că valorile inițiale λ_j trebuie să fie estimate iar valoarea lui δ trebuie să fie specificată. Relația (2.169) se poate aproxima prin următoarea *relație liniară* (relațiile (2.163)—(2.165))

$$\lambda_j^{(k+1)} = \left(\frac{\delta - 1}{\delta} + \frac{1}{\delta}\frac{u_j^{(k)}}{u_j^s}\right)\lambda_j^{(k)} \tag{2.170}$$

O altă posibilitate de a calcula multiplicatorii Lagrange $\{\lambda\}$ constă în rezolvarea sistemului de J ecuații liniare, conform următorului procedeu. Se consideră dezvoltarea de prim ordin a restricțiilor active în jurul lui $\{X^{(k)}\}$

$$g_h^{(k+1)} \approx g_h^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_h^{(k)}}{\partial X_i}(X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}) = 0, \quad h = 1,\ldots,J \tag{2.171}$$

Substituind (2.162) în (2.170) și rearanjînd, rezultă

$$(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_h^{(k)}}{\partial X_i}(T_i^{(k)} - 1)X_i^{(k)} = -g_h^{(k)} \qquad h = 1,\ldots,J \tag{2.172}$$

Substituind $T_i^{(k)}$ din (2.157) și rearanjînd, (2.172) devine

$$\sum_{i=1}^{u} \frac{\partial g_h^{(k)}}{\partial X_i} X_i^{(k)} \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \frac{\partial g_j^{(k)}}{\partial X_i} \Big/ \frac{\partial Z^{(k)}}{\partial X_i} = \frac{g_h^{(k)}}{1-\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_h^{(k)}}{\partial X_i} X_i^{(k)}, \quad h = 1,\ldots,J \tag{2.173}$$

În contrast cu procedeul din (2.169) sau (2.170), acest sistem de J ecuații liniare în necunoscutele λ_j $(j = 1,\ldots,J)$ nu cere o estimare inițială a multiplicatorilor Lagrange. Însă, restricțiile pasive nu sînt eliminate automat. Aceasta se

poate realiza prin eliminarea restricțiilor asociate cu valorile negative ale multiplicatorilor Lagrange.

Exemplu 2.3. Khot, Berke și Venkayya au rezolvat grinda cu zăbrele cu zece bare din figura 2.3 prin diferite metode. Au fost considerate următoarele restricții

— restricții în dimensiunile elementelor $0{,}1 \leqq X_i \qquad i=1,\ldots,10$

— restricții ale eforturilor unitare $-25 \leqslant \sigma_i \leqslant 25 \qquad 1=1,\ldots,10$

— restricții privind deplasările verticale ale nodurilor 1, 2 $u_j \leqslant 2{,}0 \qquad j=1,2$.

Problema a fost rezolvată fie prin analizarea structurii după fiecare modificare a variabilelor de proiectare și evaluarea multiplicatorilor Lagrange, fie analizînd structura după mai multe iterații. Ultima abordare poate fi privită ca o tehnică Newton-Raphson modificată. Rezultatele diferitelor cazuri sînt prezentate în tabelul 2.3.

Tabelul 2.3

Cazul	Relația de recurență X_i	Relația de recurență λ_j	Parametri	No. iterației
1	Ecuația (2.160)	Ecuația (2.169)	$\beta=4,\ \delta=0{,}25$	1
2	Ecuația (2.162)	Ecuația (2.173)	$\alpha=0{,}75$	1
3	Ecuația (2 162)	Ecuația (2.173)	$\alpha=0{,}75$	50
4	Ecuația (2.162)	Ecuația (2.173)	$\alpha=0{,}75$	50

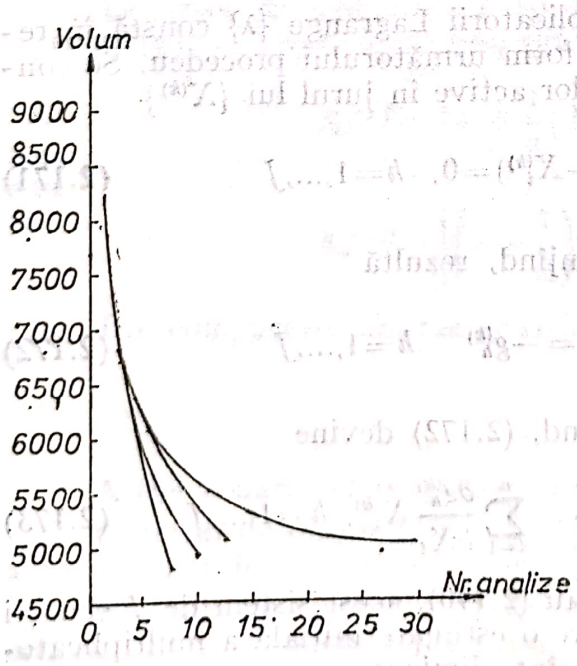


Fig. 2.5

În cazurile 2 și 3 restricțiile au fost considerate ca inegalități, valorile negative ale multiplicatorilor Lagrange nefiind permise. În cazul 4 restricțiile au fost egalități. Evoluția iterațiilor este arătată în fig. 2.5.

Rezultatele obținute sînt următoarele (tabelul 2.4).

Tabelul 2.4

Cazul	Volumul optim	Numărul de analize
1	51 878	12
2	50 767	28
3	50 767	11
4	50 767	6

A. OPTIMIZAREA STRUCTURILOR ÎN DOMENIUL ELASTIC

CAPITOLUL 3

OPTIMIZAREA STRUCTURILOR LA ACȚIUNI STATICE

3.1. Proiectarea optimă a structurilor spațiale în cadre

În metodele convenționale de proiectare a structurilor se consideră condițiile cele mai dezavantajoase de eforturi posibile ale elementelor structurii supusă la diferite tipuri de acțiuni. Au fost încercate diferite metode pentru o mai bună utilizare a elementelor structurii. Astfel, s-a încercat să se obțină proiectarea optimă (greutatea minimă sau cost) prin utilizarea sintezei structurale convenționale folosind conceptul de pași alternativi liniari din metoda gradientului, Schmit. Schmit a considerat de asemeni un spectru continuu de variație a secțiunii și a proprietăților ei pentru obținerea optimului. Configurația geometrică a structurii a fost introdusă printr-o variabilă continuă independentă definită de un singur parametru.

Însă, în cazul structurilor complexe nu este posibil să se definească o configurație printr-un număr limitat de parametri independenți continui și nici nu este posibil să se obțină o variație continuă a secțiunii.

Pentru a obține o proiectare optimă trebuie ca toate acțiunile posibile asupra structurii să fie considerate simultan. Într-o optimizare, parametrii de proiectare (suprafața secțiunilor transversale și momentele de inerție ale elementelor componente) se tratează ca necunoscute ; ele sînt determinate din condiția ca greutatea totală a structurii să fie minimă, de exemplu, cu respectarea restricțiilor, nedepășirea eforturilor unitare admisibile și/sau a deformațiilor. În general se poate spune că o proiectare optimă este o proiectare echilibrată, chiar dacă nu este valabilă pentru orice acțiune. Ecuațiile de echilibru și de compatibilitate (restricțiile) din analiza liniară a structurilor devin neliniare atunci cînd se consideră simultan ca necunoscute variabilele de proiectare și cele de comportare. Moses a tratat o structură elementară formată din trei bare și un cadru portal arătînd că restricțiile neliniare pot fi liniarizate pe porțiuni într-o proiectare inițială pentru orice valori arbitrar alese ale variabilelor de proiectare și a celor de comportare, corespunzătoare. Problema de programare liniară rezultată a fost rezolvată prin metoda simplex.

În prezentarea din acest capitol, după B. L. Karihaloo, P. R. Pathare, C. K. Ramesh, ecuațiile de echilibru ale nodurilor în forma matricială a lui Eisemann, care sînt neliniare, sînt liniarizate prin metoda planului secant utilizată de Kelly în problemele de cercetare operațională neliniare.

Problema de optimizare a structurilor este astfel transformată într-o serie de probleme de programare liniară.

Scanned with OKEN Scanner

3.1.1. Formularea matematică

Formularea de bază pentru analiză se bazează pe metoda matricei de rigiditate care are evidente avantaje asupra metodei forțelor ne necesitînd un tratament special în cazul structurilor din cadre pentru gradul de nedeterminare și adaptîndu-se ușor la programare pe calculator. Se utilizează ecuațiile de echilibru ale nodurilor în forma matricială propusă de Eisemann. Relațiile fundamentale în cazul dependenței liniare forță-deplasare pentru un singur element se pot exprima sub forma matricială astfel :

$$\begin{bmatrix}\{F^A\}\\ \{F^B\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[K] & [L]\\ [M] & [N]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{U'^A\}\\ \{U'^B\}\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

unde $\{F^A\}$, $\{F^B\}$ și $\{U'^A\}$, $\{U'^B\}$ sînt cele șase componente ale vectorilor forță, respectiv deplasare, la cele două extremități ale elementului AB în raport cu axele proprii de coordonate (care pot fi arbitrare), denumite coordonate relative. $[K]$, $[L]$, $[M]$, $[N]$, sînt sub matrici 6×6 ale matricei de rigiditate a elementului AB exprimate în raport cu axele relative. Elementele submatricei K se pot obține ușor cu ajutorul principiilor energetice (a se vedea: I. Munteanu, Structuri pentru construcții, vol. 1, Edit. Acad. R.S.R., 1983). Submatricele $[M]$, $[N]$, $[L]$ se deduc cu ajutorul matricei $[K]$ utilizînd teorema de reciprocitate a lui Maxwell-Betti și principiul suprapunerii. Se poate arăta că

$$[L]=-[K]\,[E]^T,\quad [M]=-[E]\,[K],\quad [N]=[E]\,[K]\,[E]^T \tag{3.2}$$

unde $[E]$ este matricea care leagă forțele din cele două extremități, 6×6, pentru echilibrul static și este denumită matricea de echilibru. $[E]^T$ este transpusă matricei $[E]$.

Ecuațiile de echilibru ale nodurilor sînt următoarele :

$$\begin{aligned}&\sum_B [K^{AB}]\,\{U^A\}+\sum_B [L^{AB}]\,\{U^B\}=\{P^A\}\\ &\sum_A [M^{AB}]\,\{U^A\}+\sum_A [N^{AB}]\,\{U^B\}=\{P^B\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

În ecuația 3.3, A este nodul considerat iar B este extremitatea unui alt element concurent în A. Aceste ecuații sînt scrise într-un sistem de axe valabil pentru întreaga structură, denumit absolut. Toate mărimile exprimate în sistemul relativ sînt transformate în mărimi din sistemul absolut prin utilizarea matricei de rotație a fiecărui element. $\{P^A\}$, $\{P^B\}$ și $\{U^A\}$, $\{U^B\}$ sînt respectiv vectori cu șase componente ai reacțiunii exterioare și deplasării din nodurile A și B exprimați în coordonate absolute.

Pentru analiza liniară a structurii se iau la început valori arbitrare ale parametrilor de proiectare. Ecuațiile 3.3 aplicate fiecărui nod al structurii conduc la un sistem de ecuații liniare avînd ca necunoscute deplasările nodurilor în coordonate absolute. Substituind apoi în ecuația 3.1 deplasările relative ale extremităților elementelor se obțin vectorii forță din extremitățile elementului (cele exercitate de nod asupra elementului).

Se presupune că parametrii de proiectare necunoscuți asociați elementelor structurii sînt aria secțiunii transversale A și momentul de inerție I.

Pentru un element, avem

$$I_y=I,\quad I_z=k_2I,\quad I_x=k_1I \tag{3.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde x, y, z sînt axele relative ale elementului, x fiind axa longitudinală, k_1 și k_2 sînt constante ce depind de forma elementului. Aceasta este adevărat pentru cazul secțiunilor cu două axe de simetrie dar se poate extinde cu suficientă precizie și la alte tipuri de secțiuni transversale.

Ecuațiile matriciale ale echilibrului nodului sînt neliniare deoarece atît variabilele de proiectare cît și variabilele de comportare sînt considerate necunoscute. Aceste ecuații sînt liniarizate pe porțiuni prin efectuarea dezvoltării în serie Taylor în jurul vectorului de proiectare inițial $\{X^0\}$ care reprezintă valorile arbitrare ale variabilelor de proiectare și de comportare. Însă, pentru îmbunătățirea convergenței acest vector se alege astfel încît să satisfacă una din ecuațiile 3.3. Se efectuează un calcul convențional de proiectare cu valori alese pentru variabilele de proiectare și se determină variabilele de comportare asociate.

Ambele tipuri de variabile determinate astfel, formează punctul inițial de proiectare X^0. Problema optimizării structurii constă în minimizarea funcției

$$Z(X_j) \qquad j=1, 2, \ldots, n \tag{3.5}$$

cu restricțiile

$$g_i(X_j)=0 \qquad i=1, 2, \ldots, m \tag{3.6}$$

și

$$L_j \leqslant X_j \leqslant U_j \tag{3.7}$$

unde X_j sînt variabilele de proiectare și comportare necunoscute, $Z(X_j)$ este funcția obiectiv eventual, neliniară, $g_i(X_j)=0$ ecuațiile de echilibru neliniare matriciale ale nodurilor, scrise pentru întreaga structură, L_j și U_j sînt limitele inferioare și superioare ale variabilelor de proiectare și de comportare.

Limitele inferioare și superioare ale parametrilor de proiectare depind de producția standardizată de profile laminate. Unele dintre variabilele de comportare depind de cerințele de performanță ale structurii cum ar fi deformațiile și eforturile unitare admisibile. Înlocuind ecuațiile neliniare prin termenii de prim ordin ai dezvoltării în serie Taylor, problema de optimizare, adică de minimizare a funcției $Z(X_j)$ este aproximată prin

Să se minimizeze

$$Z(X_j^0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Z(X_j^0)}{\partial X_j}(X_j-X_j^0) \tag{3.8}$$

supusă la

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(X_j^0)}{\partial X_j}(X_j-X_j^0)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m \tag{3.9}$$

și

$$L_j \leqslant X_j \leqslant U_j \tag{3.10}$$

Formulată astfel, problema devine una de programare liniară care constă în minimizarea funcției de performață liniară

$$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \tag{3.11}$$

supusă la

$$X_j \geqslant 0 \text{ pentru toți } j \qquad X_j \leqslant U_j \text{ pentru unii sau toți } j \tag{3.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

și restricțiile liniare

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j=b_i \qquad i=1, 2, \ldots, m \quad n\geq m \tag{3.13}$$

Limita inferioară L_j pentru variabilele X_j se consideră forma $X_j=L_j+Y_j$ unde $Y_j\geq 0$. Restricțiile liniare sînt compatibile dar nu suficiente pentru determinarea unică a necunoscutelor. C_j, a_{ij}, b_i sînt toți coeficienți constanți. Procedînd cum este indicat mai sus ecuațiile matriciale de echilibru ale nodurilor (3.3) sînt liniarizate pe porțiuni considerînd un vector inițial X^0 obținut printr-o analiză liniară separată pentru diferite cazuri de încărcare (parametrii de încărcare rămînînd aceiași în toate cazurile). Deoarece principiul suprapunerii este valabil, fiecare termen al ecuației matriciale se poate liniariza separat. Ecuațiile (3.3) după liniarizare sînt

$$\begin{aligned}
&\sum_{B} [K_0^{AB}]\{U^A\}+\sum_{B} [L_0^{AB}]\{U^B\}+\sum_{B} [P_0^{AB}]\{X^{AB}\}=2\{P_0^A\}\\
&\sum_{A} [M_0^{AB}]\{U^A\}+\sum_{A} [N_0^{AB}]\{U^B\}+\sum_{A} [Q_0^{AB}]\{X^{AB}\}=2\{P_0^B\}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

unde indicele 0 se referă la parametrii de proiectare inițiali, variabilele de comportare și încărcările, luate pentru vectorul inițial $\{X^0\}$. $[P_0^{AB}]$ și $[Q_0^{AB}]$ sînt matrici 6×2 ce implică variabilele de comportare inițiale obținute din analiza liniară a fiecărei încărcări. $\{X^{AB}\}$ este un vector ce implică parametrii de proiectare necunoscuți pentru fiecare element. Considerînd ecuațiile (3.14) pentru fiecare nod, se obține un sistem de ecuații liniare pentru fiecare caz de încărcare formează restricțiile care sînt compatibile dar nu suficiente pentru determinarea unică a necunoscutelor $\{U^A\}$, $\{U^B\}$ și $\{X^{AB}\}$.

Numărul total de ecuații ce formează restricțiile liniare sînt egale cu numărul de cazuri de încărcare $\times$ numărul de noduri $\times N$, în timp ce numărul de necunoscute total este

$$(2\times \text{ numărul de elemente} + \text{numărul de ecuații de mai sus})$$

iar N depinde de tipul structurii și de condițiile ei la extremități, astfel el este 6 pentru un cadru rigid spațial.

Funcția de cost sau indicele de performanță (greutatea totală a structurii) care trebuie minimizată se scrie pentru o structură în cadre sub forma

$$Z=k\rho \sum_i Al_i \tag{3.15}$$

unde: Z — greutatea totală, k — constantă ce consideră greutatea nodului, etc. A — aria transversală a elementului component, l — lungimea elementului, ρ — densitatea materialului. Se notează că pentru structurile în cadre care au configurația geometrică și materialul cunoscute, funcția de performanță este o dependență liniară de parametrul de proiectare A. Astfel, problema de proiectare optimă a structurii s-a transformat într-o succesiune de probleme de programare liniară rezolvabile prin bine cunoscuta tehnică Simplex aflată în dotarea bibliotecilor calculatoarelor.

Scanned with OKEN Scanner

3.1.2. Relații de calcul și programare

Submatricea $[K]$ a matricei de rigiditate a elementului și matricea de echilibru sînt următoarele

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & & & & & \\ & \frac{12EI}{l^3}z & & & & \frac{6EI}{l^2}z \\ & & \frac{12EI}{l^3}y & & -\frac{6EI}{l^2}y & \\ & & & \frac{GI}{l}z & & \\ & & -\frac{6EI}{l^2}y & & -\frac{4EI}{l}y & \\ & \frac{6EI}{l^2}z & & & & \frac{4EI}{l}z \end{bmatrix}; \quad [E]=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & -l & & 1 & \\ & l & & & & 1 \end{bmatrix}$$

unde : A — aria secțiunii transversale a elementului, l — lungimea elementului, I_x, I_y, I_z momentele de inerție ale elementului în raport cu axele x, y, z, E — modulul de elasticitate longitudinal, G — miodulul de elasticitate transversal.

Deoarece principiul suprapunerii este valabil, fiecare termen din ecuațiile (3.3) se liniarizează separat pentru vectorii de deplasare inițiali $\{U_0^A\}$, $\{U_{0i}^B\}$ și parametrii de proiectare A_0 și I_0 (obținuți printr-o analiză liniară sau luați arbitrar). Se poate scrie astfel, prima relație (3.14)

$$[K^{AB}]\{U'^A\}=[K_0^{AB}]\{U'^A\}+[G_0'^{AB}]\{X^{AB}\}-2[K_0^{AB}]\{U_0'^A\}$$

unde

$$\{U'^A\}=\begin{bmatrix} u'^A_X \\ u'^A_Y \\ u'^A_Z \\ \theta'^A_X \\ \theta'^A_Y \\ \theta'^A_Z \end{bmatrix}, \quad [G_0'^{AB}]=\begin{bmatrix} \frac{u'^A_{0X}E}{l} & & & & & \\ & Ek_2\left(\frac{12u'^A_{0Y}}{l^3}+\frac{6\theta'^A_{0Z}}{l^2}\right) & & & & \\ & & E\left(\frac{12u'^A_{0Z}}{l^3}-\frac{6\theta'^A_{0Y}}{l^2}\right) & & & \\ & & & \frac{Gk_1\theta'^A_{0X}}{l_A} & & \\ & & E\left(-\frac{6u'^A_{0Z}}{l^2}+\frac{4\theta'^A_{0Y}}{l}\right) & & & \\ & Ek_2\left(\frac{6u'^A_{0Y}}{l^2}+\frac{4\theta'^A_{0Z}}{l}\right) & & & & \end{bmatrix}, \quad \{X^{AB}\}=\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}, \quad \{U_0'^A\}=\begin{bmatrix} u'^A_{0X} \\ u'^A_{0Y} \\ u'^A_{0Z} \\ \theta'^A_{0X} \\ \theta'^A_{0Y} \\ \theta'^A_{0Z} \end{bmatrix}$$

$$[K_0^{AB}]=\begin{bmatrix} \frac{A_0E}{l} & & & & & \\ & \frac{12Ek_2I_0}{l^3} & & & & \frac{6Ek_2I_0}{l^2} \\ & & \frac{12EI_0}{l^3} & & -\frac{6EI_0}{l^2} & \\ & & & \frac{Gk_1I_0}{l} & & \\ & & -\frac{6EI_0}{l^2} & & \frac{4EI_0}{l} & \\ & \frac{6Ek_2I_0}{l^2} & & & & \frac{4Ek_2I_0}{l} \end{bmatrix}$$

Indicele 0 se referă la vectorul inițial $\{X^0\}$ o iar semnul „'" la axele relative ale elementului AB. Similar se arată că

$$[L^{AB}]\{U'^B\}=[L_0^{AB}]\{U'^B\}+[H_0'^{AB}]\{X^{AB}\}-2[L_0^{AB}]\{U_0'^{AB}\}$$

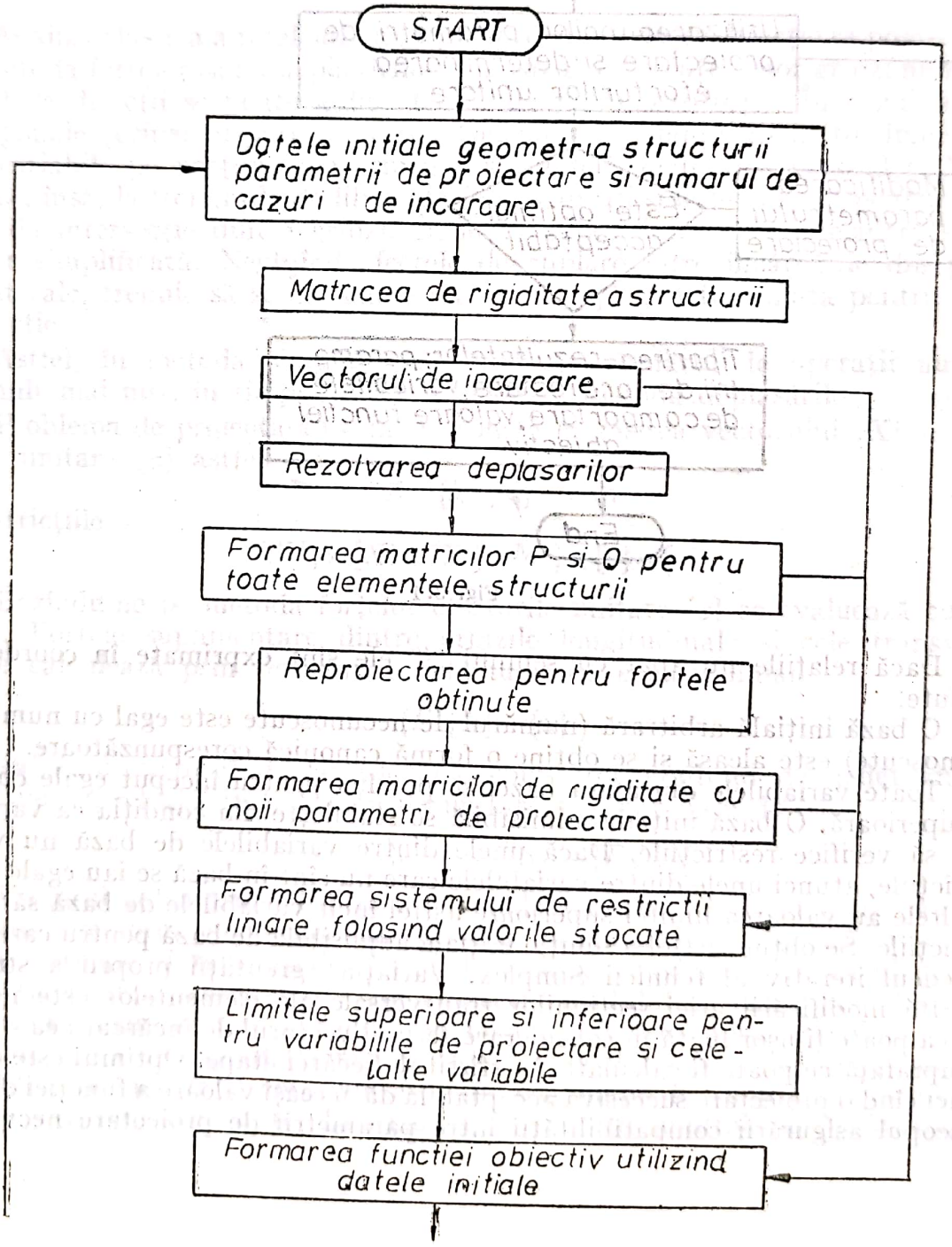
unde

$$[H_0'^{AB}]=\begin{bmatrix} -\frac{Eu_{0X}'^B}{l} \\ Ek_2\left(-\frac{12u_{0Y}'^B}{l^3}+\frac{6\theta_{0Z}'^B}{l^2}\right) \\ E\left(-\frac{12u_{0Z}'^B}{l^3}-\frac{6\theta_{0Y}'^B}{l^2}\right) \\ -\frac{Gk_1\theta_{0X}'^B}{l} \\ E\left(\frac{6u_{0Z}'^B}{l^2}+\frac{2\theta_{0Y}'^B}{l}\right) \\ Ek_2\left(-\frac{6u_{0Y}'^B}{l^2}+\frac{2\theta_{0Z}'^B}{l}\right) \end{bmatrix}$$

$[P_0^{AB}]$ și $[Q_0^{AB}]$ sînt matrici 6×2 ce implică variabilele de comportare pentru vectorul inițial $\{X^0\}$ pentru elementul AB.

$$[P_0^{AB}]=\begin{bmatrix} \frac{E}{l}(u_{0X}^A-u_{0X}^B) & \\ \frac{12Ek_2}{l^3}\left[(u_{0Y}^A-u_{0Y}^B)+\frac{l}{2}(\theta_{0Z}^A+\theta_{0Z}^B)\right] & \\ \frac{12E}{l^3}\left[(u_{0Z}^A-u_{0Z}^B)-\frac{l}{2}(\theta_{0Y}^A+\theta_{0Y}^B)\right] & \\ \frac{Gk_1}{l}(\theta_{0X}^A-\theta_{0X}^B) & \\ -\frac{6E}{l^2}\left[(u_{0Z}^A-u_{0Z}^B)-\frac{l}{3}(2\theta_{0Y}^A+\theta_{0Y}^B)\right] & \\ \frac{6Ek_2}{l^2}\left[(u_{0Y}^A-u_{0Y}^B)+\frac{l}{3}(2\theta_{0Z}^A+\theta_{0Y}^B)\right] & \end{bmatrix}$$

$$[Q_0^{AB}]=\begin{bmatrix} \frac{E}{l}(u_{0X}^B-u_{0X}^A) & & \\ & \frac{12Ek_2}{l^3}\left[(u_{0Y}^B-u_{0Y}^A)-\frac{l}{2}(\theta_{0Z}^B+\theta_{0Z}^A)\right] & \\ & \frac{12E}{l_3}\left[(u_{0Z}^B-u_{0Z}^A)+\frac{l}{2}(\theta_{0Y}^B+\theta_{0Y}^A)\right] & \\ & & \frac{Gk_1}{l}(\theta_{0X}^B-\theta_{0X}^A) \\ & \frac{6E}{l^2}\left[(u_{0Z}^B-u_{0Z}^A)+\frac{l}{3}(2\theta_{0Y}^B+\theta_{0Y}^A)\right] & \\ & -\frac{6Ek_2}{l^3}\left[(u_{0Y}^B-u_{0Y}^A)-\frac{l}{3}(2\theta_{0Z}^B+\theta_{0Z}^A)\right] & \end{bmatrix}$$



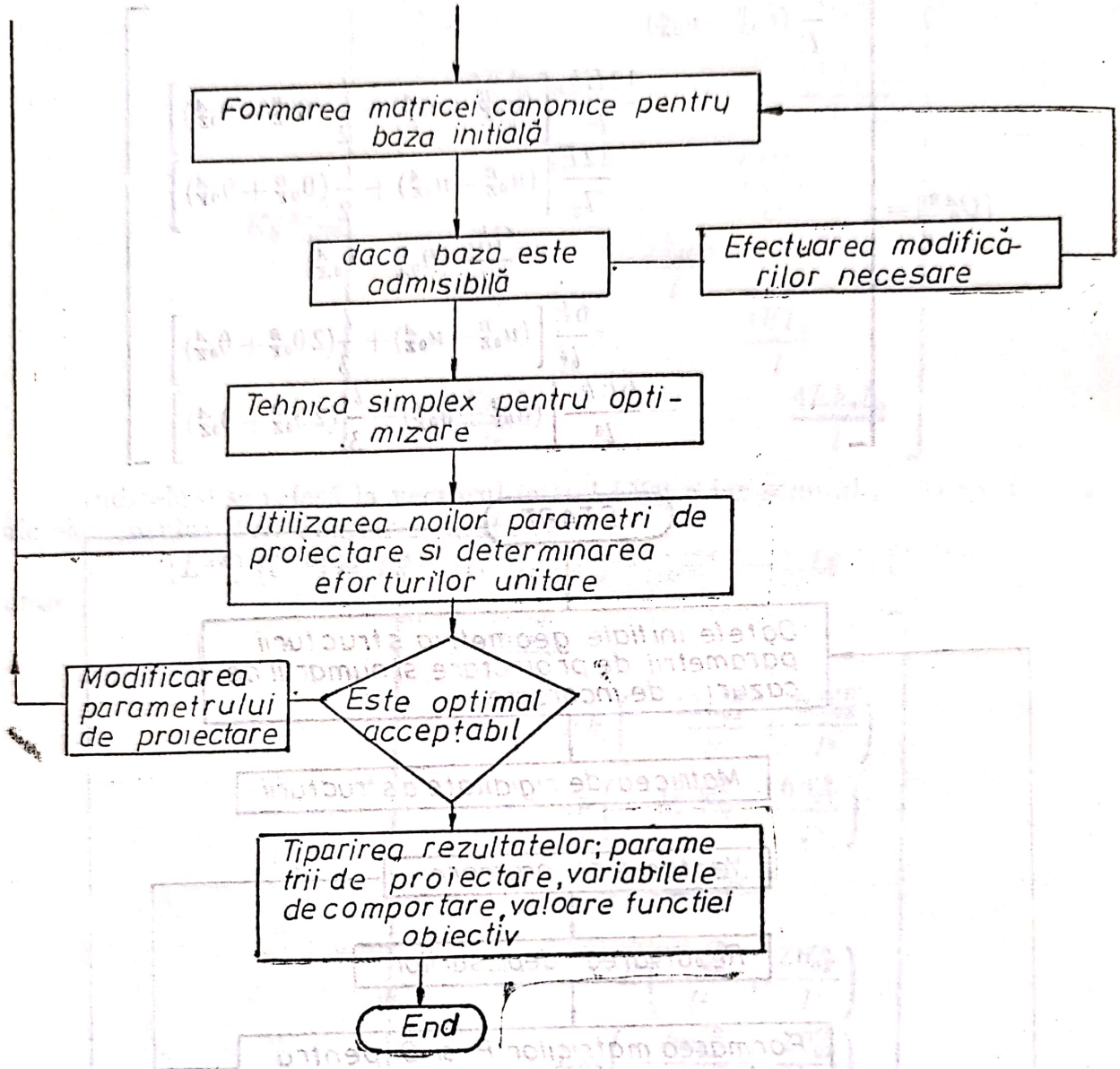


Fig. 3.1

Dacă relațiile nu apar cu semnul „'" ele sînt exprimate în coordonatele absolute.

O bază inițială arbitrară (numărul de necunoscute este egal cu numărul de necunoscute) este aleasă și se obține o formă canonică corespunzătoare.

Toate variabilele din afara bazei se pot lua pentru început egale cu limita lor superioară. O bază inițială admisibilă se stabilește din condiția ca variabilele bază să verifice restricțiile. Dacă unele dintre variabilele de bază nu verifică restricțiile, atunci unele dintre variabilele care nu sînt în bază se iau egale cu zero iar altele au valoarea limitei superioare astfel încît variabilele de bază să verifice restricțiile. Se obține astfel o soluție inițială admisibilă de bază pentru care începe procedeul iterativ al tehnicii Simplex. Variația greutății proprii a structurii datorită modificării ariei secțiunilor transversale ale elementelor este neglijată deși ea poate fi ușor luată în considerare scriind vectorul de încărcare ca o funcție de suprafață ce poate fi calculată la sfîrșitul fiecărei etape. Optimul este obținut atunci cînd o proiectare succesivă acceptabilă dă aceeași valoare a funcției obiectiv. În scopul asigurării compatibilității între parametrii de proiectare necunoscuți

ai elementului (suprafața și momentul de inerție) relațiile între ei au fost încorporate în program care efectuează modificările necesare. Operațiile sînt ilustrate în schema logică din fig. 3.1.

3.2. Proiectarea optimă a rețelelor de grinzi

Rețelele de grinzi sînt realizate în mod obișnuit dintr-o rețea ortogonală de grinzi acționate normal la planul lor. Acest tip de structură este utilizată frecvent pentru planșeele clădirilor civile și industriale, fundații, poduri, dar și în construcția aviatică sau navală.

Geometria structurii, numărul de grinzi, deschiderile, condițiile de rezemare sînt cunoscute.

3.2.1. Proiectarea optimă a rețelelor de grinzi fără considerarea torsiunii

Analiza elastică a rețelelor cu puține grinzi în fiecare direcție se poate aborda prin metoda forțelor sau a deplasărilor. În cazul existenței unor grinzi numeroase pe ambele direcții se poate aplica teoria de placă ortotropă. În cazul rețelelor neortogonale (grinzi dispuse oblic) cu considerarea rigidității la torsiune și secțiuni variabile pe porțiuni ale grinzilor se preferă metoda deplasărilor. Metoda conduce, însă, la trei grade de libertate (două rotații și o deplasare) pentru fiecare punct de intersecție dintre grinzi. În acest subcapitol se va considera metoda forțelor simplificată. Neglijînd efectele de cuplare între încărcările din plan și cele laterale, trebuie să se considere numai o forță nedeterminată pentru fiecare intersecție.

Astfel, în metoda simplificată a forțelor numărul de operații numerice este mult mai mic, în timpul analizei, decît în metoda deplasărilor.

Problema de proiectare optimală constă în găsirea vectorului $\{X\}$ și a eforturilor unitare $\{\sigma\}$ astfel încît

$$Z=\{l\}^T\{X\}\rightarrow\min \tag{3.15}$$

cu restricțiile

$$\{X^L\}\leqslant\{X\}\leqslant\{X^s\},\ \{\sigma^L\}\leqslant\{\sigma\}\leqslant\{\sigma^s\}. \tag{3.16}$$

Bazîndu-ne pe metoda forțelor eforturile unitare $\{\sigma\}$ se evaluează cum urmează. Forțele suplimentare dintre grinzile longitudinale și cele transversale $\{N\}$ se calculează prin rezolvarea sistemului de ecuații liniare

$$[F]\{N\}=\{u\} \tag{3.17}$$

unde $\{u\}$ este vectorul deplasărilor corespunzător gradului de nedeterminare, definit de $\{u\}=\{u_0\}-\{u_p\}$. Eforturile unitare $\{\sigma\}$ sînt date de

$$\{\sigma\}=[C]\{S\}=[C](S_p\}+[F_A]\{N\}) \tag{3.18}$$

Vectorul solicitărilor $\{S\}$ poate include momente încovoietoare sau forțe tăietoare ; vectorul eforturilor unitare $\{\sigma\}$ va include, corespunzător, eforturi unitare normale și tangențiale. Ultimele trebuie considerate în cazul grinzilor înalte. Elementele matricei $[C]$ sînt respectiv modulul de rezistență al secțiunii (pentru eforturile unitare normale din încovoiere) sau suprafața inimii (pentru eforturile unitare tangențiale medii). Elementele lui $[F]$ și $\{u\}$ sînt funcții de momentele de inerție și corespunzător de aria inimii în timp ce elementele lui $\{S_p\}$ și $[F_A]$ sînt constante. În cazul unor condiții multiple de încărcare, toți

vectorii din ecuațiile (3.16)—(3.18) se transformă în matrici la care fiecare coloană corespunde unui caz de încărcare.

Existența optimului local conduce la ideia că trebuie utilizate mai multe puncte de plecare inițiale înainte de a decide că s-a obținut cea mai bună proiectare. Astfel, fiecare caz de proiectare cere repetarea ciclului de optimizare încît alegerea unei metode eficiente este mai importantă decît îa alte probleme. În plus, spațiul de proiectare poate fi neconvex și atunci se limitează alegerea subrutinelor de optimizare. Utilizarea metodei planului secant devine dificilă deoarece datorită restricțiilor neconvexe ea nu converge bine. În plus, acumularea aproximațiilor liniare la aceiași restricție poate conduce la erori datorită relei condiționări. Moses și Onoda au găsit că metoda direcțiilor conjugate este mai potrivită în proiectarea rețelelor de grinzi. Toate soluțiile intermediare în obținerea optimului sînt întotdeauna posibile (în contrast cu metoda planului secant). Mai mult, metoda nu este afectată de restricțiile neconvexe deoarece ea calculează gradientul numai pentru restricțiile active în orice punct al conturului și determină întotdeauna direcția pentru care greutatea se micșorează. Un dezavantaj al unora dintre rețelele studiate de Moses și Onoda este acela că metoda cere analize structurale mai detaliate decît metoda planului secant.

În timp ce metoda direcțiilor posibile și a șirului de programe liniare sînt utile pentru problemele în care restricțiile se aproximează prin liniarizare, metoda funcțiilor de penalitate prezintă un interes deosebit atunci cînd funcția obiectiv și restricțiile sînt puternic neliniare.

Volumul de calcule numerice, anume, numărul de analize cerut în timpul optimizării, poate fi însă considerabil mai mare în metoda funcțiilor de penalitate decît pentru alte metode.

Exemplu 3.1. — Rețea din două grinzi

Se consideră rețeaua din figura 3.2. Structura este acționată de încărcările uniform distribuite q_1, q_2 și forța concentrată P. Conform standardelor engleze există următoarele relații :

$$W_i=\left(\frac{X_i}{1{,}48}\right)^{1{,}82} \qquad I_i=1{,}007\left(\frac{X_i}{1{,}48}\right)^{2{,}65} \tag{3.19}$$

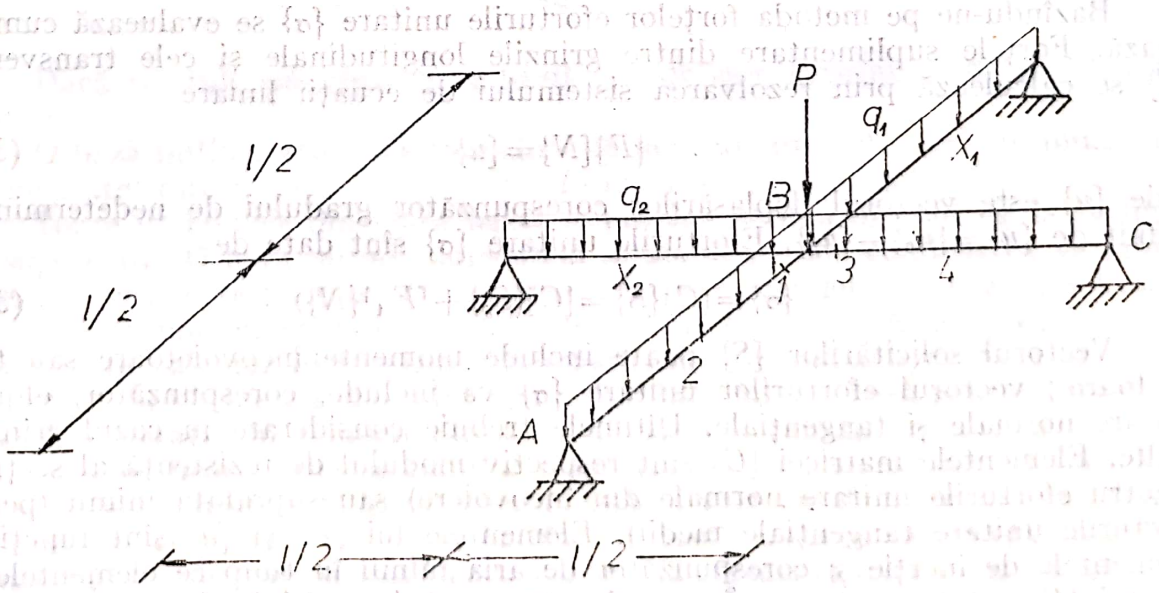


Fig. 3.2

unde W_i este modulul de rezistență al secțiunii, I_i momentul de inerție iar X_i suprafața secțiunii transversale ($i=1, 2$). Limitele superioară și inferioară ale eforturilor sînt $\{\sigma^s\}=-\{\sigma^i\}=\{20,0\}$.

Restricțiile leagă eforturile unitare normale de încovoiere din nodul B și cele din secțiunile critice situate între nodurile A, B și B, C. Funcția obiectiv Z reprezintă volumul grinzilor.

Problema de proiectare optimă constă în determinarea suprafețelor transversale ale grinzilor $\{X\}^T=\{X_1, X_2\}$ astfel încît

$$Z=\{l_1, l_2\}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\to\min \tag{3.20}$$

$$-\begin{Bmatrix}20,0\\20,0\end{Bmatrix}\leqslant\frac{1}{(X_1/1,48)^{1,82}}\begin{Bmatrix}M_1\\M_2\end{Bmatrix}\leqslant\begin{Bmatrix}20,0\\20,0\end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

$$-\begin{Bmatrix}20,0\\20,0\end{Bmatrix}\leqslant\frac{1}{(X_2/1,48)^{1,82}}\begin{Bmatrix}M_3\\M_4\end{Bmatrix}\leqslant\begin{Bmatrix}20,0\\20,0\end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

unde M_1, M_2, M_3 și M_4 sînt momentele încovoietoare din secțiunile critice 1, 2, 3, 4. Pentru calculul momentelor încovoietoare trebuie mai întîi să se determine deplasarea din nodul B, u_B

$$6E\left(\frac{1,007(X_1/1,48)^{2,65}}{(l_1/2)^3}+\frac{1,007(X_2/1,48)^{2,65}}{(l_2/2)^3}\right)u_B=\frac{5}{8}(q_1l_1+q_2l_2)+P \tag{3.23}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal. Momentele încovoietoare din nodul B sînt calculate cu relația

$$\begin{Bmatrix}M_1\\M_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}q_1(l_1/2)^2/8\\q_2(l_2/2)^2/8\end{Bmatrix}-3E\begin{Bmatrix}1,007(X_1/1,48)^{2,65}/(l_1/2)^2\\1,007(X_2/1,48)^{2,65}/(l_2/2)^2\end{Bmatrix}u_B \tag{3.24}$$

Pentru momente încovoietoare și forțe tăietoare cunoscute în B, se pot determina pozițiile secțiunilor critice 2 și 4 ce au momente încovoietoare maxime precum și momentele încovoietoare corespunzătoare M_2 și M_4.

Moses și Onoda au obținut rezultate numerice în următoarele cazuri:

cazul 1: $q_1=q_2=1,0$ $P=0$ $l_1=100$ $l_2=120$

cazul 2: $q_1=q_2=0,1$ $P=1,0$ $l_1=100$ $l_2=300$

Spațiul de proiectare pentru cele două cazuri este ilustrat în fig. 3.3.

Se notează că ambele exemple posedă minime relative. Punctele $\{X^{(1)}\}$, $\{X^{(2)}\}$ și $\{X^{(3)}\}$ reprezintă optimul local pentru cazul 1, $\{X^{(1)}\}$ fiind optimul global.

Punctul $\{X^{(4)}\}$ este optimul global pentru cazul 2. Există o diferență semnificativă

Tabela 3.1

Cazul	Optimul local	Valoarea funcției obiectiv
1	$\{X^{(1)}\}^T=23,5;\ 7,2$	$Z_1=3\,220$
	$\{X^{(2)}\}^T=5,5;\ 25,6$	$Z_2=3\,620$
	$\{X^{(3)}\}^T=13,3;\ 18,8$	$Z_3=3\,580$
2	$\{X^{(4)}\}^T=9,7;\ 6,1$	$Z_4=2\,800$
	$\{X^{(5)}\}^T=2,2;\ 18,8$	$Z=5\,860$

între optimul relativ $\{X^{(5)}\}$ și optimul global $\{X^{(4)}\}$. Rezultatele numerice sînt date în tabela 3.1.

Optimul local poate apare într-una din următoarele trei categorii, cum rezultă din cazul I al tabelului 3.1. :

a) Grindă puternică pe direcția transversală scurtă $\{X^{(1)}\}$
b) Grindă puternică pe direcția longitudinală, $\{X^{(2)}\}$
c) Proiectare cu dimensiuni intermediare pe cele două direcții $\{X^{(3)}\}$

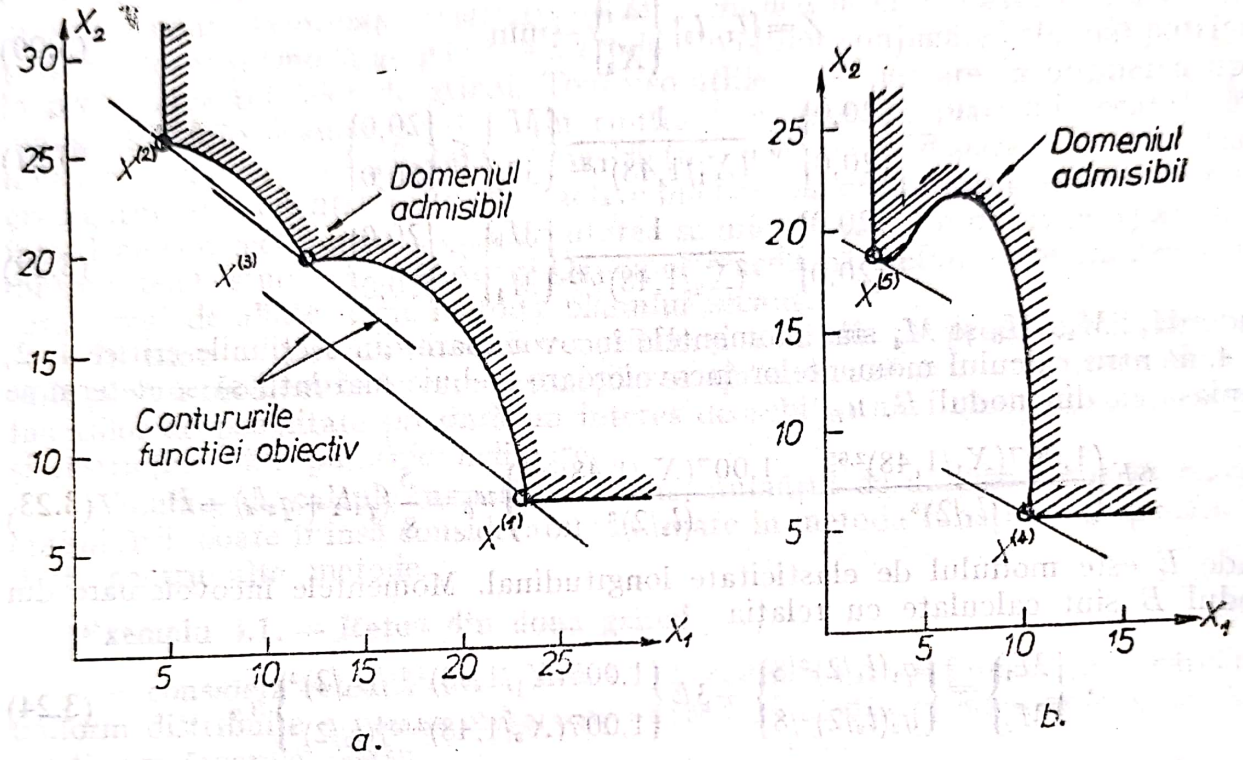


Fig. 3.3

Moses și Onoda au găsit că cele mai multe optimuri locale sînt formele de egală rezistență. Însă, în unele cazuri optimul local nu este o formă de egală rezistență sau formele de egală rezistență nu sînt optimuri locale.

În cazul 2, de exemplu în fig. 3.3 b, punctul $\{X^{(5)}\}$ este un optim local care nu este formă de egală rezistență. Punctul $\{X^{(4)}\}$ este în același timp o formă de egală rezistență și optim global. Kavlie și Moe au ilustrat soluția cazului 1 utilizînd metoda funcției de penalitate interioară. Suprafețele răspuns pentru trei valori diferite ale factorului de penalitate r sînt ilustrate în fig. 3.4. Deși există trei minime relative distincte (fig. 3.3 a), prima suprafață de răspuns din fig. 3.4 a are numai un minim $\{X^{(A)}\}$ care este situat în interiorul domeniului admisibil. Factorul de penalitate r_2 a fost luat egal cu $r_1/50$ și minimizarea suprafeței de răspuns corespunzătoare $\Psi(\{X_2\}, r_2)$a început de la $\{X^{(A)}\}$.

A doua suprafață răspuns (Fig. 3.4 b) are două minime relative, din care unul, minimul global $\{X^{(B)}\}$ a fost obținut. A treia suprafață răspuns are trei minime locale ; suprafața $\Psi(\{X\}, r_3\}$ din figura 3.4. c. Începînd calculul din $\{X^{(B)}\}$ se obține $\{X^{(C)}\}$ care este aproape de optimul global $\{X^{(1)}\}$. Factorul inițial de penalitate r_1 a fost ales astfel încît valoarea termenului de penalitate în punctul $\{X^{(A)}\}$ este aproximativ jumătate din mărimea funcției cost.

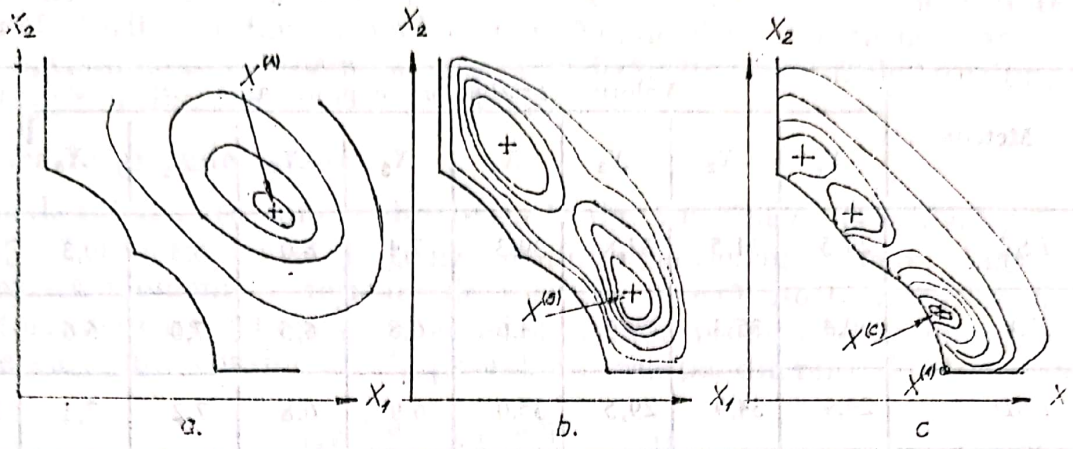


Fig. 3.4

Exemplul 3.2. — Rețea cu grinzi multiple pe cele două direcții

Existența unor minime relative multiple în structurile formate din rețele de grinzi se poate ilustra în cazul problemelor bidimensionale.

Este util să se compare rezultatele obținute în proiectarea multidimensională, unde ilustrarea grafică în spațiul de proiectare este imposibilă, prin folosirea unor diferite puncte de plecare inițiale și metode de optimizare.

Se consideră rețeaua de grinzi din figura 3.5 acționată de o încărcare uniform distribuită de valoare unitară pe grinzile longitudinale. Rețeaua de grinzi are opt variabile de proiectare X_1, X_2, ..., X_8. Momentele de inerție și modulele de rezistență ale secțiunilor sînt deduse din formulele (3.19). Limita inferioară a variabilelor de proiectare este $\{X^L\}=\{5,0\}$. Limitele superioară și inferioară ale eforturilor unitare normale sînt $\{\sigma^s\}=-\{\sigma^I\}=\{20,0\}$.

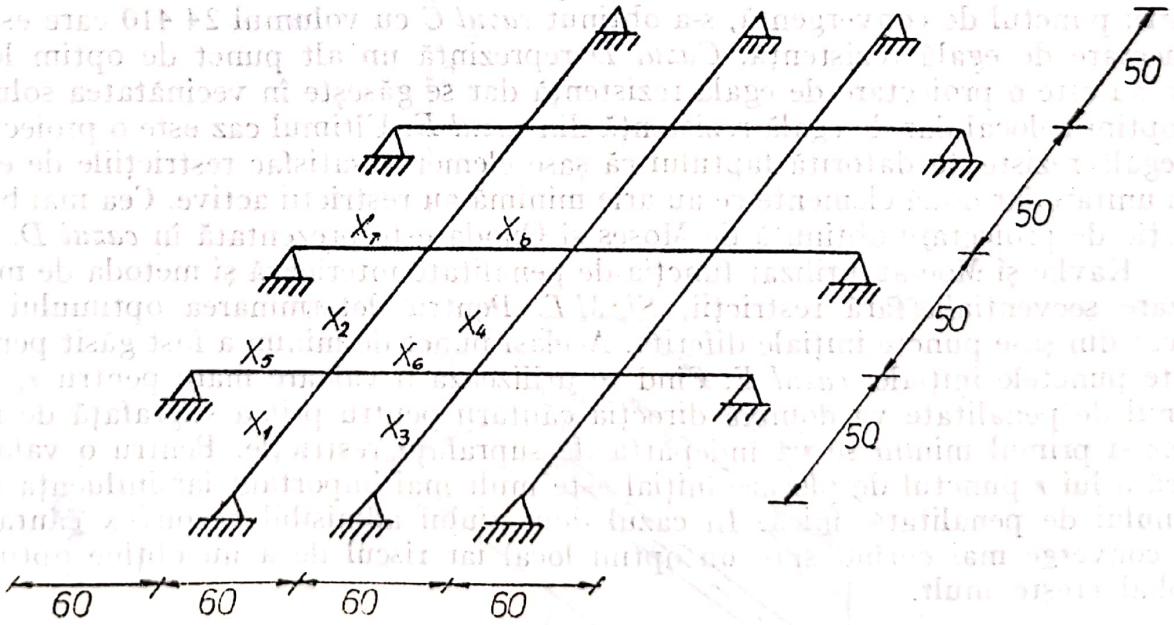


Fig. 3.5

Moses și Onoda au demonstrat că există următoarele soluții ale problemei (tabelul 3.2).

Tabelul 3.2

Cazul	Metoda	Valorile variabilelor de proiectare								Volum
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
A	*FSD*	27,5	31,5	32,8	39,3	7,4	8,0	8,8	10,3	25 000
B	*FD*	30,4	36,3	29,5	34,6	6,8	6,5	7,0	6,6	24 670
C	*FSD*	29,9	34,9	29,5	35,0	6,9	6,8	7,2	7,1	24 410
D	*FD*	5,1	5,1	47,5	55,8	13,0	17,0	13,6	16,6	23 190
E	*FSD*	5,0	5,0	47,8	56,0	12,3	17,8	13,7	16,5	23 230
F	*SUMT*	5,1	5,1	47,2	55,3	13,5	16,6	14,7	15,9	23 184
G	*ELPP*	5,0	5,0	47,6	56,2	13,8	15,4	11,3	19,8	23 112

FSD — proiectarea de egală rezistență ; *FD* — metoda direcțiilor posibile ; *SUMT* — metoda de optimizare secvențială fără restricții ; *ELPP* — metoda de programare liniară pentru echilibru.

După cum rezultă din tabelul 3.2 s-a obținut în *cazul A* prin utilizarea proiectării de egală rezistență un volum de 25 000. În *cazul B*, prin utilizarea metodei direcțiilor posibile s-a obținut o îmbunătățire a soluției, volumul fiind de 24 670. Această soluție este însă un minim relativ și nu o proiectare de egală rezistență. Prin utilizarea algoritmului raportului eforturilor unitare, în cazul *B*, pentru punctul de convergență, s-a obținut *cazul C* cu volumul 24 410 care este o proiectare de egală rezistență. *Cazul D* reprezintă un alt punct de optim local care nu este o proiectare de egală rezistență dar se găsește în vecinătatea soluției de optim nelocal dar de egală rezistență din *cazul E*. Ultimul caz este o proiectare de egală rezistență datorită faptului că șase elemente satisfac restricțiile de eforturi unitare iar două elemente ce au arie minimă au restricții active. Cea mai bună soluție de proiectare obținută de Moses și Onoda este prezentată în *cazul D*.

Kavlie și Moe au utilizat funcția de penalitate interioară și metoda de minimizare secvențială fără restricții, *SUMT*. Pentru determinarea optimului s-a plecat din șase puncte inițiale diferite. Același punct de minim a fost găsit pentru toate punctele inițiale, *cazul F*. Cînd se utilizează o valoare mare pentru r, termenul de penalitate va domina direcția căutării pentru prima suprafață de răspuns și primul minim se va îndepărta de suprafața restricție. Pentru o valoare mică a lui r punctul de plecare inițial este mult mai important iar influența termenului de penalitate, mică. În cazul domeniului admisibil neconvex căutarea va converge mai curînd spre un optim local iar riscul de a nu obține optimul global crește mult.

3.2.2. Proiectarea optimă a rețelelor de grinzi cu considerarea torsiunii

În capitolul prezent, după M.P. Saka, problema de proiectare se formulează cu metoda matricială a deplasărilor. Deplasările nodurilor și mărimile sec-

ționale sînt tratate ca variabile de proiectare. De asemeni sînt considerate restricții asupra eforturilor unitare și deplasărilor. Numărul de iterații necesare pentru obținerea optimului este în general mai mic decît 10. Efectul de torsiune este considerat prin utilizarea teoriei lui Vlasov.

a) **Torsiunea în grinzile rețelei**

Grinzile rețelei, așa cum se ilustrează în fig. 3.6, sînt cu pereți subțiri avînd forma I, [, T. Pentru astfel de grinzi, conform teoriei lui Vlasov, chiar atunci cînd nu există momente exterioare de torsiune, există eforturi unitare de torsiune. O torsiune care acționează o astfel de grindă produce o torsiune pură și o încovoiere care sînt considerate împreună în ecuația diferențială de echilibru :

$$GI_p \frac{d\varphi}{dy} - EI_\omega \frac{d^3\varphi}{dy^3} = -M_t \qquad (3.25)$$

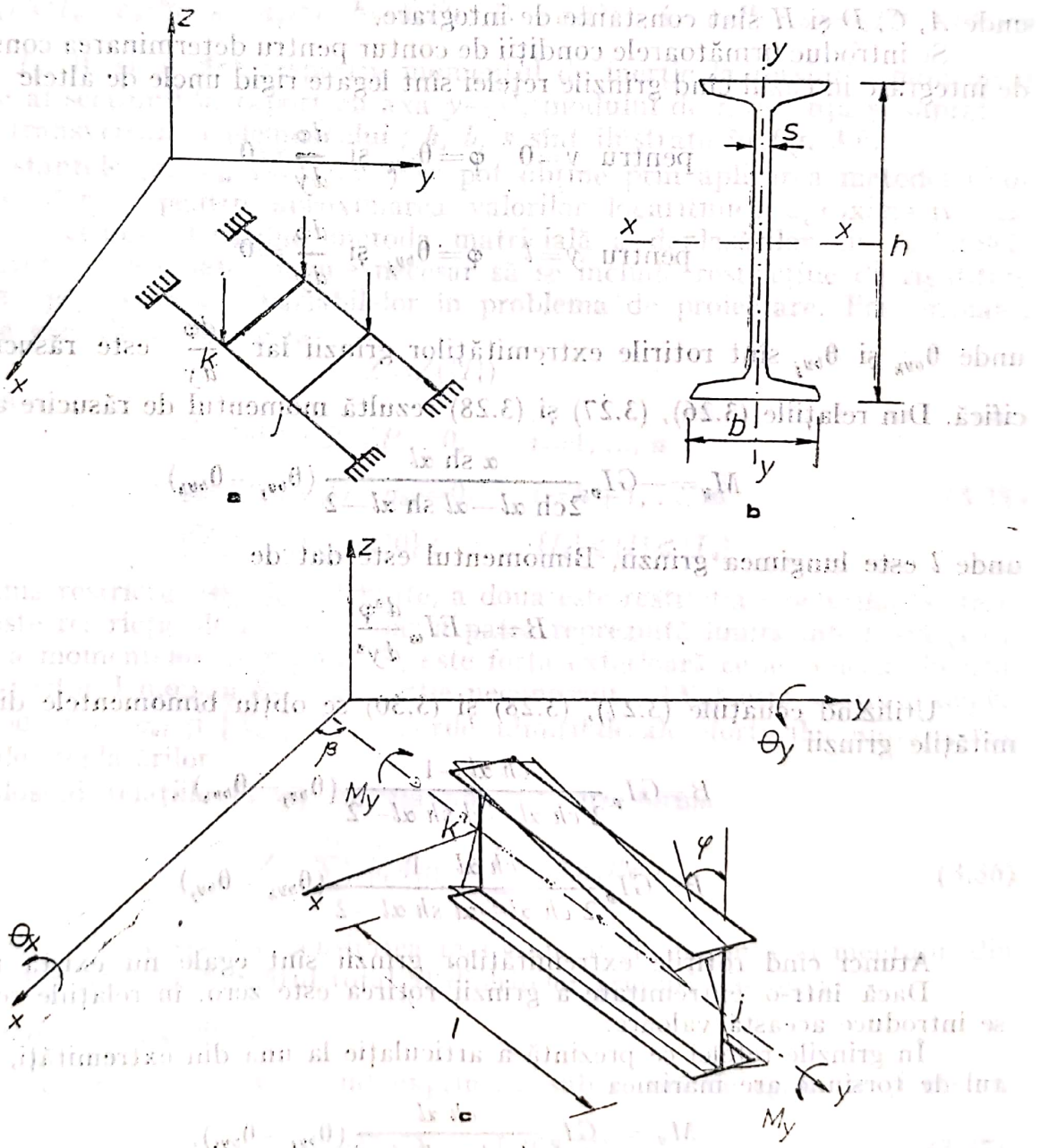


Fig. 3.6

unde G este modulul de elasticitate transversal, E este modulul de elasticitate longitudinal, I_p este momentul de inerție la torsiune iar I_ω momentul de inerție sectorial. φ este unghiul de răsucire, iar M_t este momentul total de răsucire.

Dacă ecuația (3.25) se derivează în raport cu y și se consideră că momentul de torsiune este constant în lungul grinzii se obține

$$\frac{d^4\varphi}{dy^4} - \alpha \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0 \tag{3.26}$$

unde

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_p}{EI_\omega}}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale de mai sus este

$$\varphi = A \operatorname{ch} \alpha y + C \operatorname{sh} \alpha y + Dy + H \tag{3.27}$$

unde A, C, D și H sînt constante de integrare.

Se introduc următoarele condiții de contur pentru determinarea constantelor de integrare în cazul cînd grinzile rețelei sînt legate rigid unele de altele

$$\begin{aligned} &\text{pentru } y=0 \quad \varphi = \theta_{bvk} \text{ și } \frac{d\varphi}{dy} = 0 \\ &\text{pentru } y=l \quad \varphi = \theta_{bvj} \text{ și } \frac{d\varphi}{dy} = 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

unde θ_{bvk} și θ_{bvj} sînt rotirile extremităților grinzii iar $\frac{d\varphi}{dy}$ este răsucirea specifică. Din relațiile (3.26), (3.27) și (3.28) rezultă momentul de răsucire al grinzii

$$M_y = -GI_p \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha l}{2 \operatorname{ch} \alpha l - \alpha l \operatorname{sh} \alpha l - 2} (\theta_{bvj} - \theta_{bvk}) \tag{3.29}$$

unde l este lungimea grinzii. Bimomentul este dat de

$$B = -EI_\omega \frac{d^2\varphi}{dy^2} \tag{3.30}$$

Utilizînd ecuațiile (3.27), (3.28) și (3.30) se obțin bimomentele din extremitățile grinzii

$$\begin{aligned} B &= GI_p \frac{ch\, \alpha l - 1}{2\, ch\, \alpha l - \alpha l\, sh\, \alpha l - 2} (\theta_{bvj} - \theta_{bvk}) ; \\ B &= GI_p \frac{ch\, \alpha l - 1}{2\, ch\, \alpha l - \alpha l\, sh\, \alpha l - 2} (\theta_{bvk} - \theta_{bvj}) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Atunci cînd rotirile extremităților grinzii sînt egale nu există torsiune.

Dacă într-o extremitate a grinzii rotirea este zero, în relațiile respective se introduce această valoare.

În grinzile rețelei ce prezintă a articulație la una din extremități, momentul de torsiune are mărimea

$$M_y = -GI_p \frac{ch\, \alpha l}{sh\, \alpha l - \alpha l\, ch\, \alpha l} (\theta_{bvj} - \theta_{bvk}). \tag{3.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar bimomentul din extremitatea nearticulată

$$B=-GI_p\frac{sh\,\alpha l}{sh\,\alpha l-\alpha l\,ch\,\alpha l}(\theta_{bv_j}-\theta_{bv_h}). \tag{3.33}$$

Pentru grinzi ale rețelei ce prezintă alte condiții la extremități, se obțin expresii similare pentru momentul de torsiune și bimomente.

b) **Modelul matematic**

În formularea problemei de proiectare, deplasările nodurilor sînt tratate ca variabile independente de proiectare ca și momentele de inerție ale grinzilor componente ale rețelei. Alte proprietăți ale secțiunilor transversale ale grinzilor sînt legate de momentele de inerție astfel încît fiecare grindă introduce numai o variabilă de proiectare.

$$I_p=a_1I^{b_1};I_y=a_2I^{b_2};\ h=a_3I^{b_3};\ b=a_4I^{b_4};\ W=a_5I^{b_5};\ A=a_6I^{b_6};\ s=a_7I^{b_7}. \tag{3.34}$$

unde I_p, I_y, W și A sînt respectiv momentul de inerție la torsiune, momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa $y-y'$, modulul de rezistență și suprafața secțiunii transversale a elementului; h, b, s sînt ilustrate în fig. 3.6.

Constantele (a_i, b_i, $i=1, ..., 7$) se pot obține prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate pentru aproximarea valorilor logaritmice aproximative ale mărimilor secțiunii. Utilizînd metoda matricială a deplasărilor cu variabilele de proiectare menționate, devine necesar să se includă restricțiile de rigiditate sub forma polinomială a variabilelor în problema de proiectare. Prin urmare, problema este de a minimiza

$$Z=Z(\{I\})$$

supusă la

$$\begin{aligned} &K_i(\{I\})\{X_d\}-P_i=0, && i=1, ..., n\\ &\sigma_i(\{I\},\{X_d\})-\sigma_{ai}=0, && i=n+1, ..., m\\ &\{X_d\}-\{X_{ad}\}\leqslant\{0\}; && \{I_l\}\leqslant\{I\}\leqslant\{I_s\} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Prima restricție este de rigiditate, a doua este restricția eforturilor unitare, a treia este restricția de deplasare iar a patra reprezintă limita inferioară și superioară a momentelor de inerție. P_i este forța exterioară ce acționează în nod. $\{I\}$ este vectorul momentelor de inerție necunoscute, $\{X_d\}$ este vectorul deplasărilor nodurilor. σ_{ai} și $\{X_{ad}\}$ sînt valorile admisibile ale eforturilor unitare, respectiv ale deplasărilor.

Folosind relațiile (3.34) funcția obiectiv are forma

$$Z=\sum_{i=1}^{NG}\rho_iA_il_i=\sum_{i=1}^{NG}\rho_il_ia_6I_i^{b_6}, \tag{3.36}$$

unde ρ_i și l_i sînt respectiv densitatea materialului și lungimea elementului din grupul i, iar NG este numărul total al diferitelor grupuri din rețea.

c) **Restricțiile de rigiditate**

Restricțiile de rigiditate sînt exprimate sub formă de egalitate și ele au forma

$$[K(\{I\}]\cdot\{X_d\}-\{P\}=\{0\}, \tag{3.37}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $[K(\{I\})]$ este matricea globală de rigiditate iar $\{P\}$ este vectorul încărcărilor exterioare. Contribuția unui singur element al rețelei care unește nodurile k și j, cum se vede din fig. 3.6, la matricea globală de rigiditate este

$$[K_{kj}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} A & B & -Y & -A & B & -Y \\ B & C & D & -B & R & H \\ -Y & D & F & E & H & Q \\ \hline -A & -B & Y & A & -B & Y \\ B & R & H & -B & C & D \\ -Y & H & Q & Y & D & F \end{array}\right] \tag{3.38}$$

Aici

$$A=\frac{12E}{l^3}I,\quad B=\frac{6E\sin\beta}{l^2}I,\quad C=\frac{4E\sin^2\beta}{l}I+T\cos^2\beta$$

$$D=\left(T-\frac{4E}{l}I\right)\sin\beta\cos\beta,\quad Y=\frac{6E\cos\beta}{l^2}I,\quad F=\frac{4E\cos^2\beta}{l}I+T\sin^2\beta \tag{3.39}$$

$$R=\frac{2E\sin^2\beta}{l}I-T\cos^2\beta,\quad H=-\left(\frac{2E}{l}I+T\right)\sin\beta\cos\beta,\quad Q=\frac{2E\cos^2\beta}{l}I-T\sin^2\beta,$$

Dacă torsiunea nu este considerată $T=\frac{GI_p}{l}$.

Dacă torsiunea este considerată

$$T=GI_p\frac{\alpha\,sh\,\alpha l}{2\,ch\,\alpha l-\alpha l\,sh\,\alpha l-2}. \tag{3.40}$$

În aceste expresii I este momentul de inerție necunoscut ale elementului rețelei, I_p este momentul de inerție polar, E și G sînt respectiv modulul de elasticitate longitudinal și transversal iar l este lungimea lui.

$\alpha=\sqrt{\frac{GI_p}{EI_\omega}}$ și pentru secțiuni I $I_\omega=\frac{I_y h^2}{4}$.

Cu relațiile (3.34), ecuațiile (3.40) și (3.41) sînt funcție de momentul de inerție necunoscut astfel

$$T=\frac{G}{l}a_1 I^{b_1} \tag{3.41}$$

$$T=c_1 I^{c_2}\frac{sh\,c_3 I^{c_4}}{2\,ch\,(c_3 I^{c_4})-c_3 I^{c_4} sh(c_3 I^{c_4})-2} \tag{3.42}$$

unde

$$c_1=\sqrt{\frac{G^2a_1^2}{0{,}25Ea_2a_3^2}},\quad c_2=1{,}5b_1-0{,}5b_2-b_3,\quad c_3=\sqrt{\frac{Ga_1l^2}{0{,}25Ea_2a_3^2}},\quad c_4=0{,}5b_1-0{,}5b_2-b_3 \tag{3.44}$$

valorile a_i, b_i fiind indicate în relațiile (3.34). Se poate vedea din ecuațiile (3.39), (3.42) și (3.43) că relațiile ce exprimă contribuția unui element al rețelei la matricea globală de rigiditate sînt funcții numai de momentul de inerție necunoscut.

Scanned with OKEN Scanner

d) Restricțiile eforturilor unitare

În rețelele alcătuite din grinzi cu pereți subțiri, eforturile unitare elastice sînt o combinație între cele cauzate de momentele încovoietoare și cele cauzate de bimomente

$$-\sigma_{ci} \leqslant \pm\sigma_{bi} \pm \sigma_{\omega i} \leqslant \sigma_{ti} \tag{3.45}$$

unde σ_{ci} și σ_{ti} sînt eforturile unitare admisibile de compresiune respectiv tensiune iar σ_{bi} și $\sigma_{\omega i}$ sînt eforturile unitare datorită momentului încovoietor respectiv bimomentului, din elementul i.

Într-un element al rețelei ce leagă nodurile k și j ca în figura 3.6 și pentru care sînt valabile ecuațiile (3.34), eforturile unitare datorită momentelor încovoietoare la cele două extremități sînt exprimate în funcție de momentele de inerție astfel

$$\begin{bmatrix}\sigma_{bk}\\ \sigma_{bj}\end{bmatrix} = I^{1-b_5}\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11}a_{12}-a_{13} & & -a_{11}a_{22}-a_{23} & \\ a_{11}a_{12}-a_{23} & & -a_{11}a_{12}-a_{13} & \end{array}\right]\begin{bmatrix}\{X_{dk}\}\\ \{X_{dj}\}\end{bmatrix} \tag{3.46}$$

unde

$$a_{11}=\frac{6E}{a_5 l^2},\quad a_{12}=\frac{4E\sin\beta}{a_5 l^2},\quad a_{13}=\frac{4E\cos\beta}{a_5 l},$$
$$a_{22}=\frac{2E\sin\beta}{a_5 l},\quad a_{23}=\frac{2E\cos\beta}{a_5 l} \tag{3.47}$$

Pe de altă parte, eforturile unitare datorită bimomentelor sînt

$$\sigma_\omega = \frac{B\omega}{I_\omega} \tag{3.48}$$

unde B este bimomentul, ω este aria sectorială iar I_ω este momentul de inerție sectorial. Bimomentul este dat de ecuațiile (3.31) și (3.33). Aria sectorială pentru profilul I este $\omega=0{,}25\,bh$ unde b și h sînt arătate în figura 3.6. Substituind relațiile (3.34) în (3.31) și (3.47) se obțin eforturile unitare datorită bimomentului

$$\sigma_{\omega i}=[0\;\; U_i\cos\beta\;\; -U_i\sin\beta\;\; 0\;\; U_i\cos\beta\;\; U_i\sin\beta]\begin{bmatrix}\{X_{dk}\}\\ \{X_{dj}\}\end{bmatrix} \tag{3.49}$$

unde

$$U_i = c_r I^{c_6}\frac{ch(c_3 I^{c_4})-1}{2\,ch(c_3 I^{c_4})-c_3 I^{c_4} sh(c_3 I^{c_4})-2},\quad c_5=\frac{Ga_1a_4}{a_2a_3},\quad c_x=b_1-b_2-b_3+b_4 \tag{3.50}$$

a_i și b_i fiind date de relațiile (3.34) iar c_3 și c_5 de (3.44). Astfel, eforturile unitare datorită momentelor încovoitoare și bimomentelor sînt exprimate în funcție de momentele de inerție ale grinzilor rețelei prin relațiile (3.46) și (3.49). Se consideră de asemeni restricția eforturilor unitare tangențiale

$$\tau_i = \frac{T_i}{A_i} \leqslant \tau_{ai} \tag{3.51}$$

unde T_i este forța tăietoare din elementul i, A_i este aria inimii iar τ_{ai} este efortul unitar tangențial admisibil. Utilizînd relațiile (3.34). eforturile unitare tangențiale din grindă se pot exprima astfel în funcție de momentul ei de inerție

$$\tau_i = I^{1-c_8}\,[b_{11}\;b_{12}\;-b_{13}\;-b_{11}\;b_{12}\;b_{13}]\begin{bmatrix}X_{dk}\\ X_{dj}\end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$b_{11}=\frac{12E}{c_7 l^3},\quad b_{12}=\frac{6E\sin\beta}{c_7 l^2},\quad b_{13}=\frac{6E\cos\beta}{c_7 l^2},\quad c_7=a_3a_7,\quad c_b=b_3+b_7 \tag{3.53}$$

Relația (3.45) implică faptul că pentru o secțiune a unui element este necesar să se considere patru restricții independente de eforturi unitare pentru satisfacerea tuturor situațiilor. Însă, la fiecare iterație, se obțin deplasările nodurilor fie ca rezultat al analizei fie din metoda simplex după liniarizarea problemei. Utilizînd aceste valori, este posibil să se determine semnul efortului unitar longitudinal maxim și efortul unitar tangențial la fiecare extremitate a grinzii elementului. Deci, devine posibil să se introducă numai o restricție pentru efortul unitar longitudinal și alta pentru efortul unitar tangențial; în total două restricții de eforturi unitare pentru fiecare grindă.

e) **Restricțiile de deplasare**

Includerea deplasărilor nodurilor ca variabile de proiectare în problemă, reduce restricțiile de deplasare numai la limitarea valorilor lor superioare

$$\{X_d\}\leqslant\{X_{ad}\} \tag{3.54}$$

unde $\{X_{ad}\}$ este vectorul deplasărilor admisibile. Deplasările se iau în valoare absolută deoarece tehnicile de programare matematică operează numai cu variabile nenegative. Pentru aceasta este necesar să se efectueze substituția

$$X_j=\gamma_j-e_j \tag{3.55}$$

și se impun restricțiile de deplasare sub formă

$$X_j\leqslant X_{adj},\quad \gamma_j\leqslant X_{adj}+e_j \tag{3.56}$$

unde γ_j este o nouă variabilă negativă ce înlocuiește X_j iar e_j este o constantă care are valoarea cea mai negativă a lui X_j. Limitele pentru deplasările verticale se iau din standarde. În cazul rotațiilor nodurilor, limitele sînt destul de largi. Valoarea $e=0{,}02$ radiani este convenabilă deoarece teoria liniară a structurilor este aplicabilă numai micilor deplasări cu $|\theta|\leqslant 0{,}02$.

f) **Probleme de optimizare, programare și calcul**

După cum rezultă din analiza precedentă, atît funcția obiectiv cît și restricțiile sînt neliniare în variabilele de proiectare, deci avem o problemă de programare neliniară. Ca și în precedentul capitol problema se descompune, realizînd dezvoltarea în serie Taylor, și reținînd numai primii doi termeni, într-o problemă de programare liniară.

Astfel, problema inițială de optimizare (3.35) devine

Să se minimeze

$$Z=Z(\{V^\circ\})+\nabla Z(\{V^\circ\})\,[\{V^1\}-\{V^\circ\}].$$

supusă la restricțiile

$$S_i(\{V^\circ\})+\nabla S_i(\{V^\circ\})\,[\{V^1\}-\{V^\circ\}]=0,$$

$$\sigma_i(\{V^\circ\})+\nabla\sigma_i(\{V^\circ\})\,[\{V^1\}-\{V^\circ\}]\gtrless 0, \tag{3.54}$$

$$\{X_d\}-\{X_{ad}\}\leqslant 0,\quad (1-m)\{I^\circ\}\leqslant\{I^1\}\leqslant(1+m)\{I^\circ\},$$

unde $\{V\}=[\{I\}\{X_a\})]^T$ este vectorul variabilelor de proiectare în care submatricea $\{I\}$ conține momentele de inerție ale diferitelor grupuri iar X_a conține deplasările celor N noduri. Restricția i de rigiditate are forma

$$S_i(\{V\})=K_i(\{I\})\ \{X_a\}-P_i=0 \tag{3.55}$$

Restricția de efort unitar pentru elementul i este

$$\sigma_i(\{V\})=B_i(\{I\})\ \{X_a\}-\sigma_{ai}\leqslant 0 \tag{3.56}$$

Valorile vectorului $\{V^0\}$ sînt cunoscute, deci și ale funcțiilor ce depind numai de el în timp ce $\{V^1\}$ este vectorul variabil al necunoscutelor. m este o mărime de preselecție pentru deplasarea limitelor. Ea este considerată în scopul prevenirii fluctuației iterațiilor și a ameliora convergența problemei inițiale neliniare. Problema de programare liniară (3.54) este rearanjată astfel

Să se minimizeze

$$Z=\nabla Z(\{V^0\})\ \{V^1\}+Z(\{V^0\}-\nabla Z(\{V^0\})\ .\ \{V^0\}$$

supusă la restricțiile

$$\begin{gathered}\nabla S_i(\{V^0\})\ \{V^1\}=\nabla S_i(\{V^0\})\ \{V^0\}-S_i(\{V^0\})\\ \nabla\sigma_i(\{V^0\})\ \{V^1\}\gtrless\nabla\sigma_i(\{V^0\})\ \{V^0\}-\sigma_i(\{V^0\})\\ (X_a^1\}\leqslant\{X_{aa}\},\quad \{I^1\}\leqslant(1+m)\ \{I^0\},\quad \{I^1\}\leqslant(1-m)\ \{I^0\}\end{gathered} \tag{3.57}$$

unde ∇Z, ∇S și $\nabla\sigma$ sînt respectiv vectorii gradienți ai funcției obiectiv, restricțiilor de rigiditate și de eforturi unitare.

$$\begin{gathered}\{\nabla Z(\{V^0\})\}=\left[\frac{\partial Z}{\partial I^0}\ \circ\right]\\ \{\nabla S_i(\{V^0\})\}=\left[\frac{\partial S_i}{\partial I^0}\ \frac{\partial S_i}{\partial X_a^0}\right]:\ \{\nabla\sigma_i(\{V^0\})\}=\left[\frac{\partial\sigma_i}{\partial I^0}\ \frac{\partial\sigma_i}{\partial X_a^0}\right]\end{gathered} \tag{3.58}$$

Derivatele restricțiilor neliniare în raport cu variabilele de proiectare se pot calcula direct. Prin urmare, derivatele restricțiilor de rigiditate și de eforturi unitare (3.55) și (3.56), în raport cu momentele de inerție și deplasările sînt

$$\left\{\frac{\partial S_i}{\partial I_j}\right\}=\frac{\partial K_i(\{I\})}{\partial I_j}\{X\}_a,\quad \frac{\partial S_i}{\partial\gamma_j}=K_{ij}(\{I\}),\quad \left\{\frac{\partial\sigma_i}{\partial I_j}\right\}=\frac{\partial B(\{I\})}{\partial I_j}\{X_a\},\quad \frac{\partial\sigma_i}{\partial\gamma_j}=B_j(\{I\}) \tag{3.59}$$

După rezolvarea problemei de programare liniară (3.54) cu metoda simplex se obțin noi valori ale variabilelor de proiectare $\{V^1\}$. Procedeul este repetat pînă ce se obține convergența funcției obiectiv.

Alegerea limitei de deplasare m este diferită de la lucrare la lucrare.

Aici, s-a luat la început valoarea de 0,90 și ea se reduce gradat cu 0,10 în fiecare iterație. În cazul cînd convergența nu este obținută, deși valoarea lui m este redusă cu 0,10 atunci iterațiile sînt continuate cu această valoare particulară.

Exemplele arată că numărul de iterații cerut pentru obținerea proiectării finale este în jur de 10.

Schema logică a procedeului de calcul este ilustrată în fig. 3.7. Procedeul poate opera fie de la un punct inițial admisibil sau de la unul neadmisibil. O singură

Scanned with OKEN Scanner

restricție este considerată și anume aceea de rigiditate. Valorile inițiale ale momentului de inerție se aleg dintr-un calcul de proiectare obișnuit.

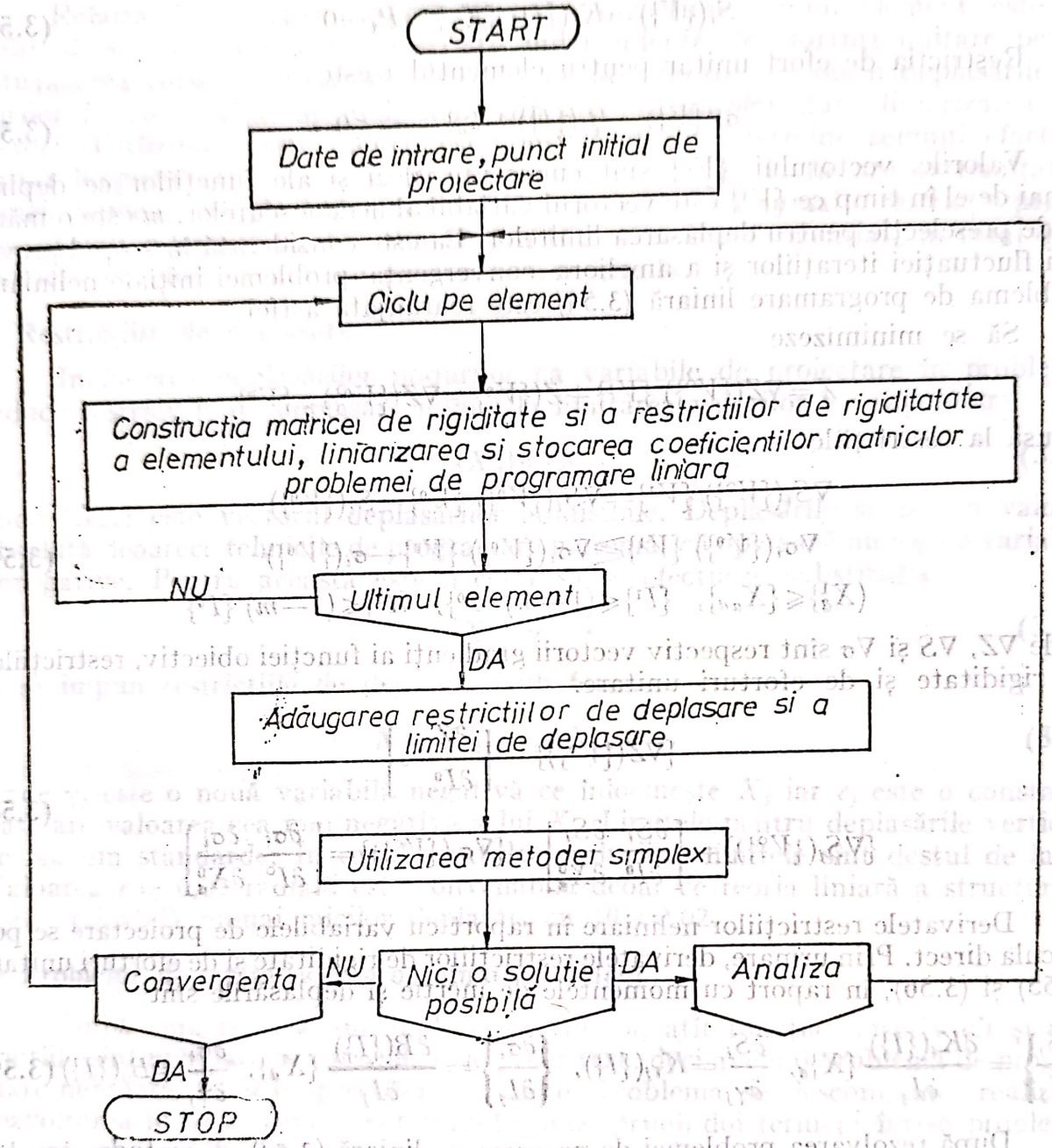


Fig. 3.7

Din schema logică rezultă că introducerea deplasării nodurilor ca variabile independente de proiectare este o simplă problemă de programare. Nu se efectuează nici o inversiune de matrice. O analiză se face atunci cînd limita de deplasare impusă nu corespunde pentru convergență la soluția optimă. Astfel, se efectuează o analiză cel mult la fiecare iterație

Criteriul de convergență utilizat la sfîrșitul algoritmului este acela că variația funcției obiectiv în două cicluri succesive trebuie să fie mai mică decît valoarea mică preselectată a limitei de deplasare.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

În toate exemplele tratate $E=210$ KN/mm², $G=81$ KN/mm², $\sigma_c=0{,}14$ KN/mm², $\sigma_t=0{,}14$ KN/mm², $\tau=0{,}09$ KN/mm². Valorile pentru a_i și b_i sînt date în tabelul 3.3. Ele corespund secțiunilor I laminate.

Tabelul 3.3

i	1	2	3	4	5	6	7
a_i	0,00874	0,1285	2,5758	1,7025	0,778	0,8827	0,1247
b_i	0,9409	0,887	0,2666	0,2153	0,773	0,476	0,23725

Exemplul 3.2. Se consideră rețeaua simplă din fig. 3.8 acționată de o forță verticală de 100 KN în nodul B. Deplasările verticale ale nodului B sînt limitate la 20 mm iar rotirile la 0,02 radiani.

Cele patru variabile de proiectare ale problemei sînt $\{V\}=\{I\, Z_1\, \theta_{x1}\, \theta_{y1}\}$. Utilizînd (3.38), restricțiile de rigiditate au forma

$$\begin{aligned}
&(A_1+A_2)IZ_1+(B_1+B_2)I\theta_{x1}-(Y_1+\\
&+Y_2)I\theta_{y1}+10=0\\
&(B_1+B_2)IZ_1+[C_1(I)+C_2(I)]\theta_{x1}+\\
&+[D_1(I)+D_2(I)]\theta_{y1}=0\\
&-(Y_1++Y_2)\,IZ_1+[D_1(I)+D_2(I)]\theta_{x1}+\\
&+[F_1(I)+F_2(I)]\theta_{y1}=0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

unde A_i, B_i și Y_i sînt funcții liniare de necunoscuta I, iar C_i, D_i și F_i sînt neliniare în I cum rezultă din (3.39). Similar, se construiesc restricțiile de eforturi unitare prin utilizarea relațiilor (3.46), (3.48) și (3.52). Se efectuează următoarele substituții de nenegativitate cerute de (3.55)

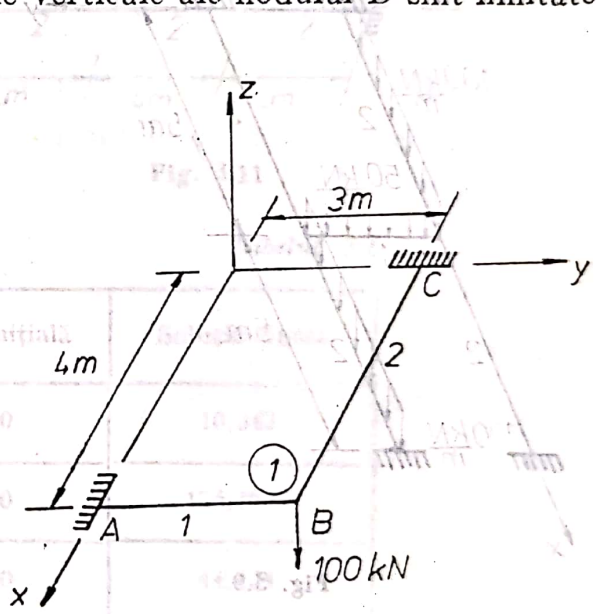


Fig. 3.8

$$Z_1=\gamma_1-20,\quad \theta_{x1}=\gamma_2-0{,}02,\quad \theta_{y1}=\gamma_3-0{,}02. \tag{3.61}$$

Punctul inițial de proiectare este ales un punct neadmisibil în care restricțiile de rigiditate și eforturi unitare sînt liniarizate. După adăugarea restricțiilor de deplasare care sînt mărginite superior și a limitei deplasărilor, problema liniarizată este rezolvată cu metoda simplex. Rezultatele iterațiilor sînt ilustrate în tabelul 3.4. Cînd se neglijează efectul torsiunii valoarea optimă a momentului de inerție al grinzii este $30{,}477\times10^7$ mm⁴.

În cazul considerării torsiunii valoarea precedentă este $33{,}527\times10^7$,mm⁴, prin urmare o creștere cu 10%.

Tabelul 3.4

Numărul iterației	Fără torsiune		Cu torsiune	
	$I \times 10^7$ mm^4	volum $\times 10^6$ mm^3	$I \times 10^7$ mm^4	volum $\times 10^6$ mm^3
0	9,800	49,061	9,800	49,061
1	17,349	64,389	17,761	65,112
2	26,358	77,138	26,796	79,190
3	29,720	83,192	32,337	86,602
4	30,461	84,172	33,490	88,058
5	30,477	84,194	33,527	88,104
6	30,477	84,194	33,527	88,104

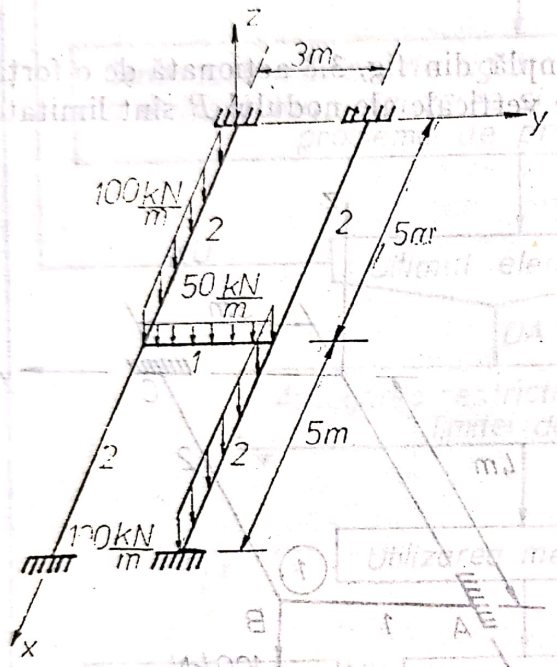


Fig. 3.9

Exemplul 3.3. Se consideră rețeaua din figura 3.9. Dimensiunile și încărcările sînt ilustrate pe figură. Deplasările verticale ale nodurilor sînt limitate la 30 mm. iar rotirile la 0,02 radiani.

Problem a de proiectare are 8 variabile care sînt momentele de inerție ale celor două grupuri și cele șase deplasări ale nodurilor. Cum rezultă din figura 3.10 convergența a fost obținută după numai 5 iterații atît în cazul considerării torsiunii cît și fără torsiune. Momentul de inerție al elementului 1 a crescut de la $4{,}27 \times 10^7$ mm^4 la $12{,}307 \times 10^7$ mm^4 cînd s-a inclus efectul de torsiune. Rezultatele inițiale și finale sînt prezentate în tabelul 3.5. Exemplul acesta arată în mod evident că în funcție de încărcare, proiectarea optimă fără considerarea torsiunii nu este corespunzătoare.

Tabelul 3.5

	Fără torsiune		Cu torsiune	
	Soluție inițială	Soluție finală	Soluție inițială	Soluție finală
$I \times 10^7$ mm^4	5,000	4,270	3,000	12,307
$I \times 10^7$ mm^4	50,000	92,326	40,000	96,927
Volum $\times$ $\times 10^7$ mm^3	31,974	42,185	28,576	44,006

Exemplul 3.4. Se consideră rețeaua din figura 3.11. Gruparea elementelor și încărcarea rețelei sînt prezentate pe figură. Deplasările verticale sînt limitate la 40 mm iar rotirile la 0,02 radiani. Punctul inițial este neadmisibil. În problemă

sînt 21 variabile și 68 de restricții. Volumul minim $87{,}7758 \times 10^7$ mm³ a fost obținut după 7 iterații. Valorile optime ale momentelor de inerție sînt prezentate în tabelul 3.6.

Se notează că eforturile unitare au fost dominante în problema de proiectare. Ca rezultat, eforturile unitare în A și B au atins valorile limită în timp ce deplasările nodurilor au fost sub limită. Valoarea eforturilor unitare de încovoiere a fost de 0,127 KN/mm² iar a celor din torsiune de 0,013 KN/mm² în aceleași puncte.

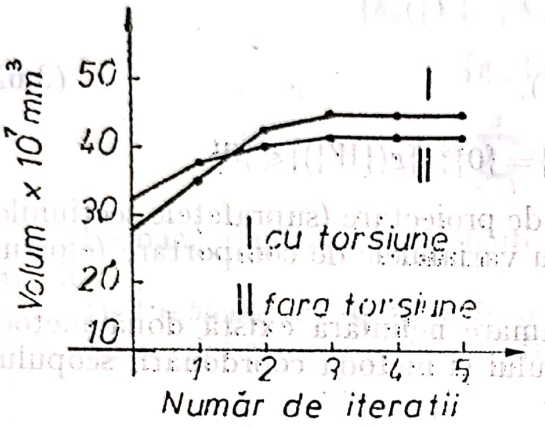


Fig. 3.10

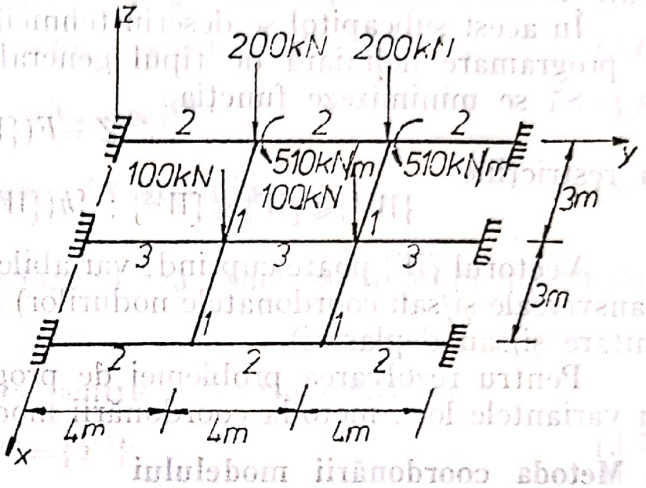


Fig. 3.11

Tabelul 3.6

	Soluție inițială	Soluție finală
$I \times 10^7$ mm⁴	3,000	10,342
$I \times 10^7$ mm⁴	50,000	125,209
$I \times 10^7$ mm⁴	50,000	44,424
Volum $\times 10^7$ mm³	59,593	87,774

3.3. Proiectarea optimă a structurilor din bare articulate plane și spațiale

3.3.1. Proiectarea optimă a structurilor din bare articulate avînd geometrie fixată

Succesul proiectării sistemelor complexe de mari dimensiuni depinde de descompunerea sistemului într-un număr de subsisteme, fiecare avînd restricțiile și scopul său. În general, un sistem ce trebuie optimizat și care cuprinde multe subsisteme și variabile nu poate fi descompus în subsisteme independente care se pot optimiza independent. Interconexiunea între subsisteme poate lua mai multe forme, dar cea mai utilizată este forma ierarhizată în care o unitate de nivelul doi controlează sau coordonează unitățile de nivel inferior sau de pri-

mul nivel. La primul nivel subsistemele se rezolvă independent. Scopul nivelului de ordinul doi este de a coordona acțiunea unităților din primul nivel astfel încît să se obțină soluția problemei inițiale. Metoda multi-nivelelor (sau bi-nivele) se introduce în sistemele de mari dimensiuni cu multe variabile sau restricții sau atunci cînd restricțiile sau funcția cost sînt complexe. Rezolvarea întregului sistem poate cere un timp de calcul excesiv sau capacitate exagerată a memoriei calculatorului în timp ce descompunerea în subsisteme coordonate poate fi mult mai ușor rezolvată.

În acest subcapitol se descriu tehnicile de descompunere pentru problemele de programare neliniară de tipul general :

Să se minimizeze funcția

$$Z=F(\{W\}), \tag{3.62}$$

cu restricțiile

$$\{W^L\}\leqslant\{W\}\leqslant\{W^S\}\ ;\ \{h(\{W\})\}=\{0\};\ \{g(\{W\})\}\leqslant\{0\}$$

Vectorul $\{W\}$ poate cuprinde variabilele de proiectare (suprafețele secțiunilor transversale și/sau coordonatele nodurilor) sau variabilele de comportare (eforturi unitare și/sau deplasări).

Pentru rezolvarea problemei de programare neliniară există două metode cu variantele lor : metoda coordonării modelului și metoda coordonării scopului.

a) **Metoda coordonării modelului**

Vectorul $\{W\}$ este partiționat în doi subvectori, $\{Y\}$, $\{X\}$

$$\{W\}=\begin{matrix}\{Y\}\\ \{X\}\end{matrix} \tag{3.63}$$

unde $\{Y\}$ este denumit subvectorul variabilelor de coordonare sau interacțiune între subsisteme iar $\{X\}$ este la rîndul lui partiționat cum urmează

$$\{X\}=\begin{matrix}\{X_1\}\\ \vdots\\ \{X_n\}\\ \vdots\\ \{X_N\}\end{matrix} \tag{3.64}$$

$\{X_n\}$ fiind variabilele asociate subsistemului n, N fiind numărul de subsisteme.

Ținînd cont de partiționare, restricțiile egalitate și inegalitate se rescriu astfel

$$\{h\}=\begin{matrix}\{h_1(\{Y\},\ \{X_1\})\}\\ \vdots\\ \{h_n(\{Y\},\ \{X_n\})\}\\ \vdots\\ \{h_N(\{Y\},\ \{X_N\})\}\end{matrix}\qquad \{g\}=\begin{matrix}\{g_1(\{Y\},\ \{X_1\})\}\\ \vdots\\ \{g_n(\{Y\},\ \{X_n\})\}\\ \vdots\\ \{g_N(\{Y\},\ \{X_N\})\}\end{matrix} \tag{3.65}$$

iar funcția obiectiv

$$Z=F(\{W\})=\sum_{n=1}^{N}F_n(\{Y\},\ \{X_n\}) \tag{3.66}$$

Variabilele $\{Y\}$ pot apare în toate expresiile, în timp ce variabilele $\{X_n\}$ apar numai în $\{h_n\}=\{0\}$, $\{g_n\}\leqslant\{0\}$ și în termenul F_n al funcției obiectiv.

Considerînd (3.65) și (3.66) problema inițială de programare neliniară (3.62) devine

$$\begin{cases} \{Y^L\} \leqslant \{Y\} \leqslant \{Y^S\} \\ \{X_1^L\} \leqslant \{X_1\} \leqslant \{X_1^S\} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \{X_n^L\} \leqslant \{X_n\} \leqslant \{X_n^S\} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \{X_N^L\} \leqslant \{X_N\} \leqslant \{X_N^S\} \end{cases} \tag{3.67}$$

$$\{h_n(\{Y\}, \{X_n\})\} = \{0\} \qquad n = 1, \ldots, N \tag{3.68}$$

$$\{g_n(\{Y\}, \{X_n\})\} \leqslant \{0\} \tag{3.69}$$

$$Z = \sum_{n=1}^{N} F_n'\{Y\}, \{X_n\}) \to \min \tag{3.70}$$

Pe baza relațiilor precedente se formulează următoarea problemă cu două nivele :

1) *Problema de nivelul întîi*

Să se determine o valoare fixată pentru $\{Y\}$ prin restricția

$$\{Y\} = \{Y^\circ\} \tag{3.71}$$

Relațiile (3.67) la (3.70) se pot descompune astfel în N probleme independente de primul nivel :

Să se determine $\{X_n\}$ încît

$$\{X_n^L\} \leqslant \{X_n\} \leqslant \{X_n^S\}, \tag{3.72}$$

$$\{h_n(\{Y^\circ\}, \{X_n\})\} = \{0\}, \tag{3.73}$$

$$g_n(\{Y^\circ\}, \{X_n\})\} \leqslant \{0\}, \tag{3.74}$$

$$Z_n = F_n(\{Y^\circ\}, \{X_n\}) \to \min \tag{3.75}$$

Introducînd notația

$$H_n(\{Y^\circ\}) = \min Z_n \tag{3.76}$$

problema de primul nivel constă în determinarea funcției

$$H(\{Y^\circ\}) = \sum_{n=1}^{N} H_n(\{Y^\circ\}) = \sum_{n=1}^{N} \min Z_n \tag{3.77}$$

pentru toți $\{X_n\}$ ($_N$—1, ..., N) ce satisfac restricțiile (3.72) la (3.75).

2) *Problema de nivelul doi*

Se cere să se determine $\{Y^\circ\}$ astfel încît

$$\{Y^L\} \leqslant \{Y^\circ\} \leqslant \{Y^S\}, \tag{3.78}$$

$$H(\{Y^\circ\}) = \sum_{n=1}^{N} H_n(\{Y^\circ\}) \to \min \tag{3.79}$$

Problema se rezolvă iterativ ca în schema din figura 3.12 :

1. Se alege o valoare inițială pentru vectorul variabilelor de coordonare $\{Y^\circ\}$.
2. Pentru un $\{Y^\circ\}$ dat se rezolvă N probleme independente de nivelul întîi.

Scanned with OKEN Scanner

3. Se modifică valoarea lui $\{Y^0\}$ astfel încît $H\{Y^0\})$ se micșorează.
4. Se repetă pasurile 2 și 3 pînă ce se obține minimul lui $H(\{Y^0\})$.

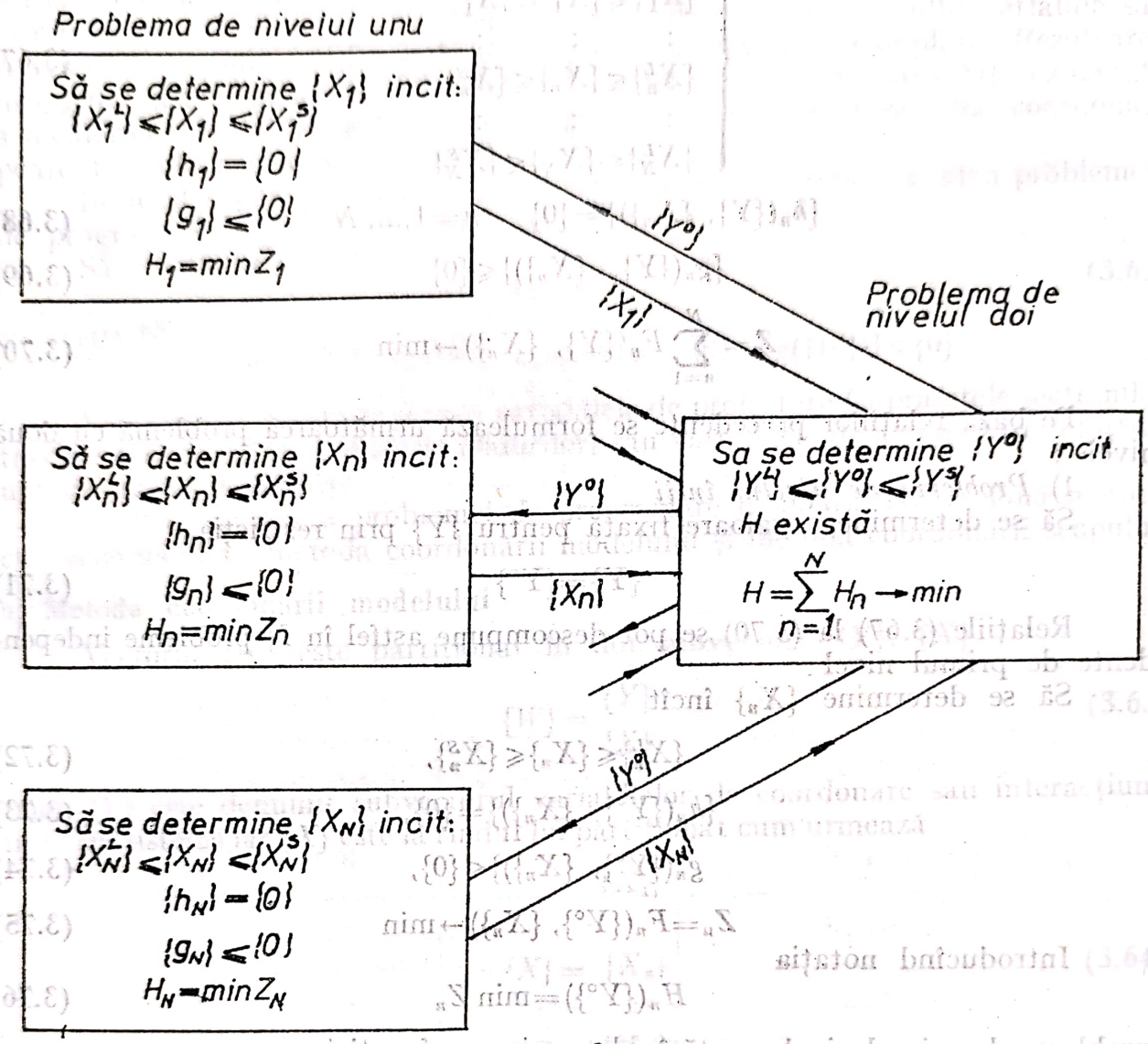


Fig. 3.12

Termenul „coordonarea modelului" derivă din faptul că se adaugă o restricție modelului matematic al sistemului sub forma unor variabile de interacțiune fixate. Metoda este denumită și „metoda admisibilă", toate valorile intermediare pentru $\{Y\}$, $\{X\}$ fiind admisibile. Acest lucru este avantajos din punct de vedere ingineresc deoarece iterația se poate termina întotdeauna la o soluție admisibilă — chiar neoptimă — oricare ar fi numărul de cicluri.

Exemplul 3.5. Metoda este ilustrată în cazul a două bare articulate ca în fig. 3.13. acționate de o forță verticală de 100 KN în nodul C. Variabilele sînt suprafețele secțiunilor transversale ale barelor X_1, X_2 și coordonata Y a nodului. Restricțiile sînt : limita superioară a eforturilor unitare 100000 KN/m^2 intervalul de 1,0 la 3,0 m pentru Y și valori pozitive pentru arii.

Să se determine X_1, X_2, Y astfel încît $20\sqrt{16+Y^2}/(YX_1) \leqslant 100.000$ (efortul unitar în bara 1) ; $80\sqrt{1+Y^2}/(YX_2) \leqslant 100.000$ (efortul unitar în bara 2)

$$1{,}0 \leqslant Y \leqslant 3{,}0\ ;\ X_1, X_2 > 0\ \ Z = X_1\sqrt{16+Y^2} + X_2\sqrt{1+Y^2} \to \min.$$

Problema este formulată pentru criteriul volumului minim, Y fiind variabila coordonatoare; subproblemele primului nivel (rezolvate pentru valori fixate Y) sînt:

Subproblema 1: să se determine

$$H_1(Y^\circ)=\min Z_1=X_1\sqrt{16+(Y^\circ)^2}$$

pentru X_1 care satisface

$$20\sqrt{16+(Y^\circ)^2}/(YX_1)\leqslant 100.000;\quad X_1>0$$

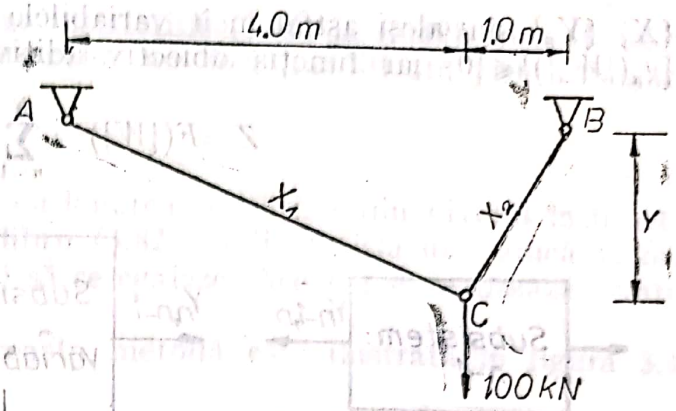


Fig. 3.13

Subproblema 2: Să se determine

$$H(Y^\circ)=\min\ Z_2=X_2\sqrt{1+(Y^\circ)^2}$$

pentru X_2 care satisface

$$80\sqrt{1+(Y^\circ)^2}/(Y^\circ X_2)\leqslant 100.000\qquad X_2>0$$

Problema de nivelul doi constă în determinarea lui Y° astfel încît

$$1{,}0\leqslant Y^\circ\leqslant 3{,}0$$

$$\min\ H(Y^\circ)=H_1(Y^\circ)+H_2(Y^\circ)$$

Rezultatul final este

$$Y^\circ_{opt}=2{,}0\text{ m};\quad X_{1opt}=4{,}48\times10^{-4}\text{ m}^2;\quad X_{2opt}=8{,}96\times10^{4}\text{ m}^2;$$

$$\min H(Y^\circ)=4\times10^{-3}\text{ m}^3$$

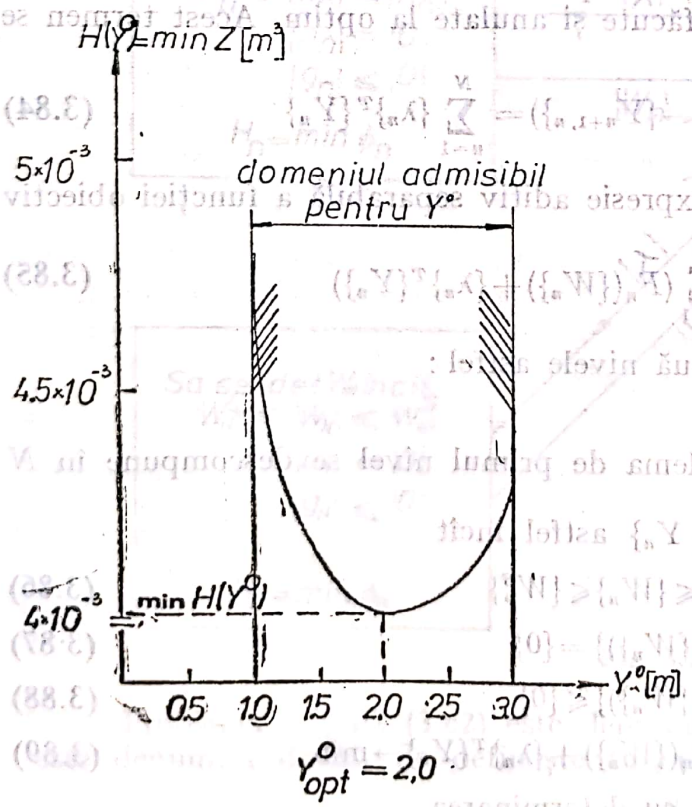


Fig. 3.14

$H(Y^\circ)$ în funcție de Y° este reprezentat în fig. 3.14. Alegînd coordonata nodului ca variabilă coordonatoare, fiecare subproblemă de nivelul întîi devine o problemă de optimizare a sistemului din două bare cu geometrie fixă.

b) Metoda coordonării scopului

În această metodă sistemul este decuplat, toate legăturile între subsisteme sînt tăiate iar variabilele $\{Y\}$, acum denumite variabile de interconectare sînt considerate că au valori diferite în cele două părți ale tăieturii.

Definind $\{Y_n\}$ vectorul variabilelor asociate subsistemului n, vectorul tuturor variabilelor asociate acestuia este

$$\{W_n\}=\begin{matrix}\{X_n\}\\ \{Y_n\}\end{matrix}\qquad (3.80)$$

$\{X\}, \{Y_n\}$ sînt aleşi astfel încît variabilele $\{W_n\}$ apar numai în $\{h_n(\{W_n\})=\{0\}$, $\{g_n(\{W_n\})\}\leqslant\{0\}$ iar funcţia obiectiv aditiv separabilă are forma

$$Z=F(\{W\})=\sum_{n=1}^{N} F_n(\{W_n\}) \tag{3.81}$$

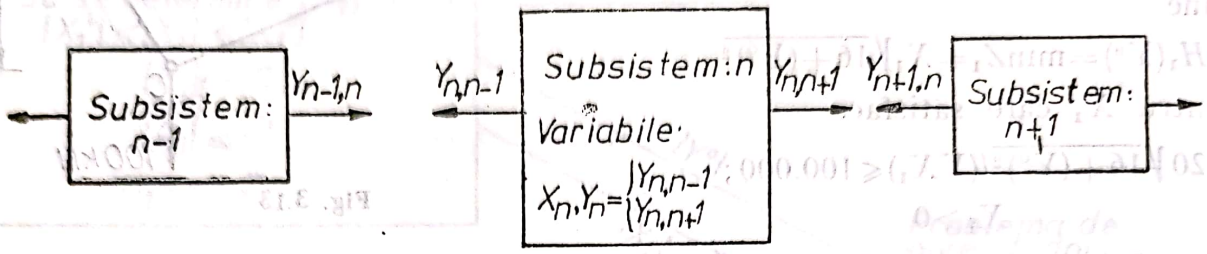


Fig. 3,15

În timp ce $\{X_n\}$ şi $\{X_{n+1}\}$ cuprind diferite variabile, $\{Y_n\}$ şi $\{Y_{n+1}\}$ pot cuprinde aceleaşi variabile cu valori diferite. Considerînd un sistem serial conectat ca în figura 3.14 condiţiile de interacţiune-echilibru ce sînt satisfăcute la optim au forma

$$\{Y_{n,n+1}\}=\{Y_{n+1,n}\} \qquad n=1,\ldots,N-1 \tag{3.82}$$

Introducînd vectorul variabilelor de coordonare $\{\lambda\}^T=(\{\lambda_{1,2}\}^T$, se defineşte o nouă funcţie obiectiv

$$\Phi(\{W\},\ \{\lambda\})=\sum_{n=1}^{N} F_n(\{W_n\})+\sum_{n=1}^{N-1}\{\lambda_{n,n+1}\}(\{Y_{n,n+1}\}-\{Y_{n+1,n}\}) \tag{3.83}$$

Termenul adăugat este o funcţie de penalitate introdusă pentru eventualitatea că relaţiile (3.82) nu sînt satisfăcute şi anulate la optim. Acest termen se dezvoltă sub forma

$$\sum_{n=1}^{N-1}\{\lambda_{n,n+1}\}^T(\{Y_{n,n+1}\}-\{Y_{n+1,n}\})=\sum_{n=1}^{N}\{\lambda_n\}^T\{Y_n\} \tag{3.84}$$

care, înlocuită în (3.83) produce o expresie aditiv separabilă a funcţiei obiectiv

$$\Phi(\{W\},\{\lambda\})=\sum_{n=1}^{N}(F_n(\{W_n\})+\{\lambda_n\}^T\{Y_n\}) \tag{3.85}$$

Se formulează problema cu două nivele astfel :

1) *Problema de nivelul întîi.*

Pentru valori $\{\lambda\}$ fixate, problema de primul nivel se descompune în N subprobleme independente :

Să se determine $\{W_n\}=\{X_n, Y_n\}$ astfel încît

$$\{W_n^L\}\leqslant\{W_n\}\leqslant\{W_n^S\} \tag{3.86}$$

$$\{h_n(\{W_n\})\}=\{0\} \tag{3·87}$$

$$\{g_n(\{W_n\})\}\leqslant\{0\} \tag{3.88}$$

$$\Phi_n(\{W_n\},\{\lambda\})=F_n(\{W_n\})+\{\lambda_n\}^T\{Y_n\}\to\min \tag{3.89}$$

Ultima relaţie este echivalentă cu determinarea

$$H_n(\{\lambda\})=\min\Phi_n(\{W_n\},\{\lambda\}) \tag{3.90}$$

pentru toate valorile $\{W_n\}$ ce satisfac restricțiile (3.86) la (3.89). Se notează că funcțiile obiectiv ale tuturor subsistemelor au fost modificate prin adăugarea variabilelor de coordonare $\{\lambda\}$.

2) *Problema de nivelul doi.*

Obiectivul nivelului doi este coordonarea unităților din nivelul întîi astfel încît condițiile de interacțiune-echilibru (3.82) să fie satisfăcute, adică valorile alese independent $\{Y_{n,n+1}\}$ și $\{Y_{n+1,n}\}$ să se egaleze. Aceasta se realizează printr-o alegere corespunzătoare a lui $\{\lambda\}$.

Rezolvarea problemei prin aceasta metodă este ilustrată în figura 3.16.

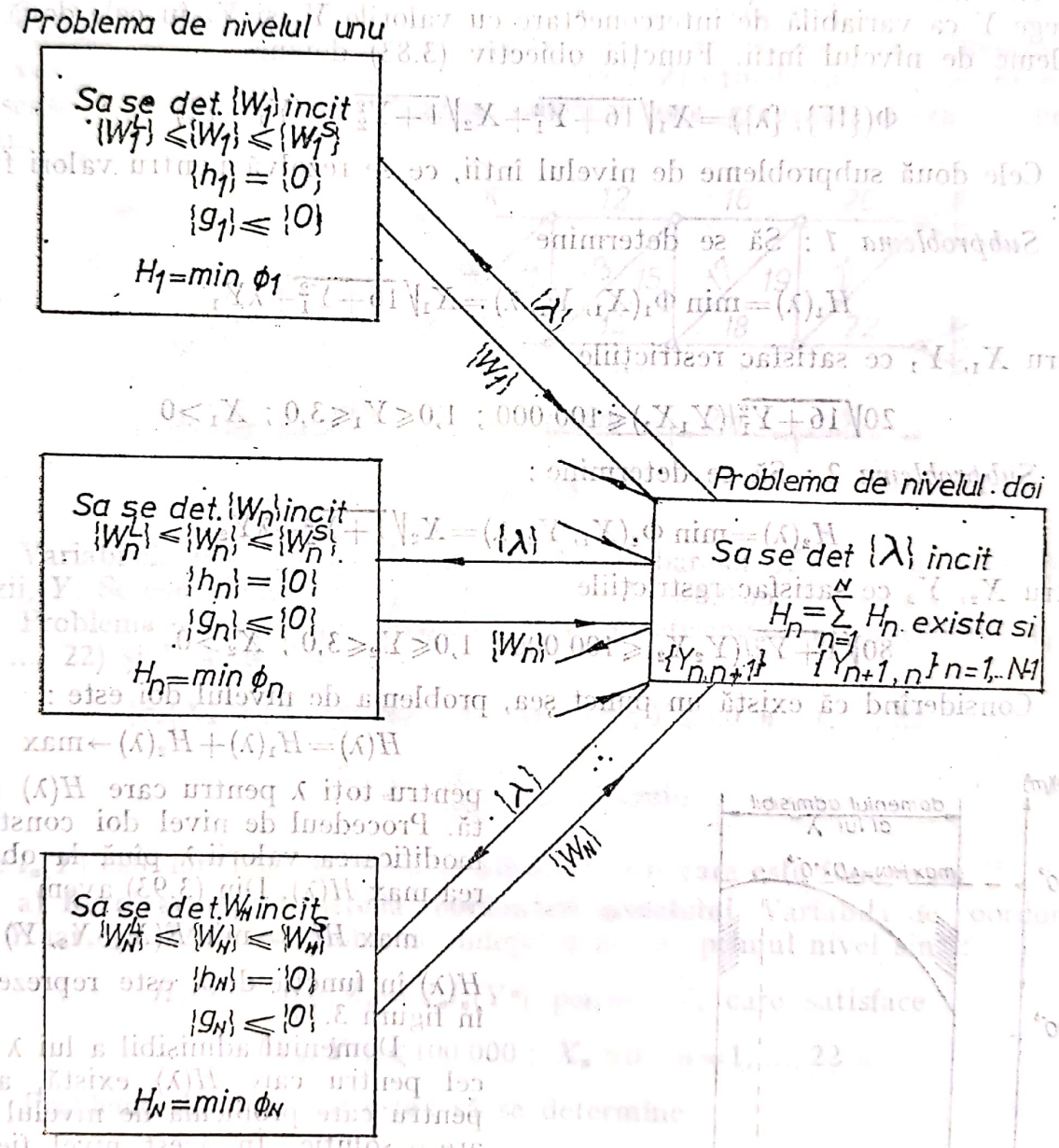


Fig. 3.16

Problema inițială (3.62) este denumită primală iar problema de nivel doi este denumită duală. Se definește funcția duală

$$H(\{\lambda\}) = \sum_{n=2}^{N} H_n(\{\lambda\}) \tag{3.91}$$

și se arată că în general

$$H(\{\lambda\}) \leqslant F(\{W\}) \tag{3.92}$$

De aici rezultă că $H(\{\lambda\})$ este o limită inferioară a lui $F(\{W\})$ sau min $F(\{W\})$. Dacă $\Phi(\{W\}, \{\lambda\})$ are un punct șea, atunci

$$\max H(\{\lambda\}) = \min F(\{W\}) \tag{3.93}$$

Existența unui punct șea poate fi garantată numai pentru domenii convexe la care problema de nivel doi constă în determinarea max $H(\{\lambda\})$ pentru toți $\{\lambda\}$ pentru care $H(\{\lambda\})$ există.

Revenind la exemplul structurii din două bare articulate din fig. 3.13 se alege Y ca variabilă de interconectare cu valorile Y_1 și Y_2 în cele două subprobleme de nivelul întîi. Funcția obiectiv (3.83) devine

$$\Phi(\{W\}, \{\lambda\}) = X_1\sqrt{16+Y_1^2} + X_2\sqrt{1+Y_2^2} + \lambda(Y_1 - Y_2)$$

Cele două subprobleme de nivelul întîi, ce se rezolvă pentru valori fixate sînt :

Subproblema 1 : Să se determine

$$H_1(\lambda) = \min \Phi_1(X_1, Y_1, \lambda) = X_1\sqrt{16+Y_1^2} + \lambda Y_1$$

pentru X_1, Y_1 ce satisfac restricțiile

$$20\sqrt{16+Y_1^2}/(Y_1X_1) \leqslant 100\,000 \; ; \; 1{,}0 \leqslant Y_1 \leqslant 3{,}0 \; ; \; X_1 > 0$$

Subproblema 2 : Să se determine :

$$H_2(\lambda) = \min \Phi_2(X_1, Y_2, \lambda) = X_2\sqrt{1+Y_2^2} - \lambda Y_2$$

pentru X_2, Y_2 ce satisfac restricțiile

$$80\sqrt{1+Y_2^2}/(Y_2X_2) \leqslant 100\,000 \; ; \; 1{,}0 \leqslant Y_2 \leqslant 3{,}0 \; ; \; X_2 > 0$$

Considerînd că există un punct șea, problema de nivelul doi este :

$$H(\lambda) = H_1(\lambda) + H_2(\lambda) \to \max$$

pentru toți λ pentru care $H(\lambda)$ există. Procedeul de nivel doi constă în modificarea valorii λ pînă la obținerea max $H(\lambda)$. Din (3.93) avem

$$\max H(\lambda) = \min F(X_1, X_2, Y)$$

$H(\lambda)$ în funcție de λ este reprezentat în figura 3.17.

Domeniul admisibil a lui λ este cel pentru care $H(\lambda)$ există, adică pentru care problema de nivelul întîi are o soluție. În acest nivel fiecare element este optimizat independent, termenul de penalitate adăugat funcției obiectiv conduce la egalitatea între Y_1 și Y_2 din ambele subprobleme pentru poziția optimă a nodului. Valorile optime sînt

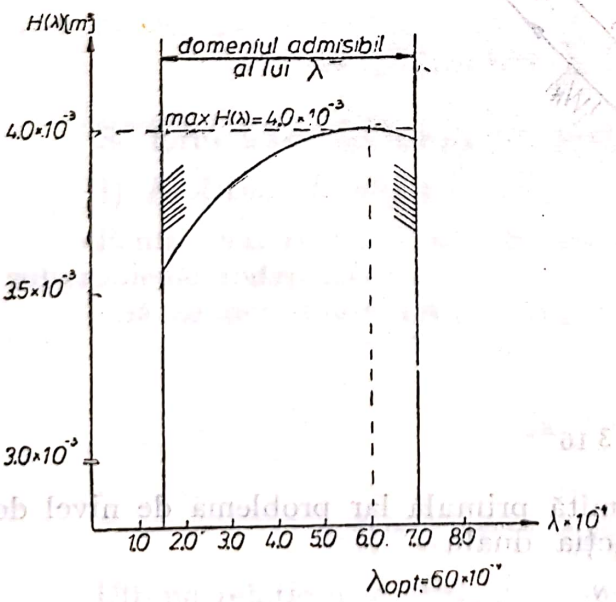


Fig. 3.17

$\lambda=6{,}0\times10^{-4}$; $Y_1=Y_2^*=2{,}0$ m ; $X_1=4{,}48\times10^{-4}$ m² ; $X_2=8{,}96\times10^{-4}$ m²

$$\max H(\lambda)=4\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

Astfel, o cale de a coordona subproblemele este de a alege multiplicatorii $\{\lambda\}$ și a maximiza $H(\{\lambda\})$ pentru toți $\{\lambda\}$ pentru care $H(\{\lambda\})$ există. Procedeul de calcul este următorul :

1. Se aleg valorile inițiale ale lui $\{\lambda\}$.
2. Se rezolvă subproblemele de primul nivel.
3. Se evaluează funcția duală $H(\{\lambda\})$ și se aleg noi multiplicatori încît ea să crească.
4. Se repetă pașii 2 și 3 pînă ce se realizează max $H(\{\lambda\})$.

Exemplul 3.6. Se consideră grinda cu zăbrele din figura 3.18 acționată de o forță verticală de 10 KN în extremitatea liberă. Eforturile unitare nu trebuie să depășească 100 000 KN/m². Funcția obiectiv este greutatea (sau volumul) grinzii.

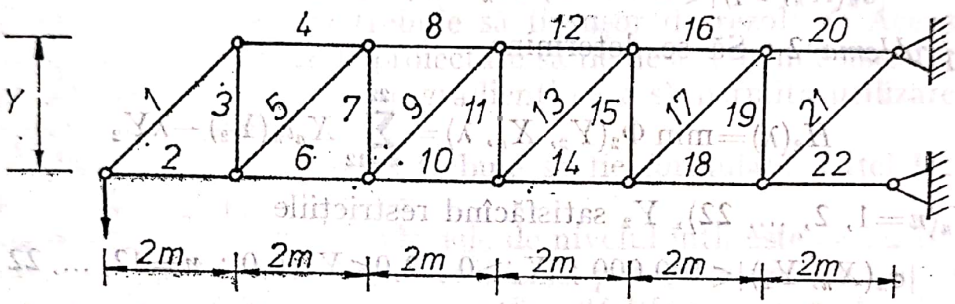


Fig. 3,18

Variabilele sînt secțiunile transversale ale barelor $X_1, \ldots, X_{22}$ și înălțimea grinzii, Y. Se consideră că limitele lui Y sînt : $Y^S=6{,}0$ m, $Y^L=2{,}0$ m.

Problema de proiectare optimă constă în determinarea variabilelor $X_n (n=1, \ldots, 22)$ și Y astfel încît

$$|\sigma_n(X_n, Y)|\leqslant 100\,000\ ;\ X_n>0\ ;\ 2{,}0\leqslant Y\leqslant 6{,}0\quad n=1, \ldots, 22$$

$$Z=\sum_{n=1}^{22} X_n l_n(Y)\rightarrow\min$$

unde $l_n(Y)$ este lungimea celui de al n-lea element care este funcție de Y.

a) **Rezolvarea prin metoda coordonării modelului.** Variabila de coordonare este Y iar cele 22 de subprobleme independente de primul nivel sînt :

$$H_n(Y^0)=\min Z_n=X_n l_n(Y^0)\ \text{pentru}\ X_n\ \text{care satisface}$$

$$|\sigma_n(X_n, Y^0)|\leqslant 100\,000\ ;\ X_n>0\ ;\ n=1, \ldots, 22$$

Problema de nivel doi este : să se determine

$$H(Y^0)=\sum_{n=1}^{22} H_n(Y^0)\rightarrow\min$$

pentru toți Y^0 din intervalul $2.0\leqslant Y\leqslant 6{,}0$. $H(Y^0)$ funcție de Y este arătat în figura 3.19. La optim

$$Y^0_{opt}=3{,}92\ \text{m}.\qquad \min H(Y^0)=8{,}58\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

b) **Rezolvare prin metoda coordonării scopului.** Alegînd Y ca variabilă de interconectare, sistemul se descompune în două subsisteme de primul nivel.

Valoarea lui Y este Y_1 pentru elementele 1, ..., 11 și Y_2 pentru elementele 12, ..., 22. Funcția (3.83) devine

$$\Phi(\{W\}, \{\lambda\}) = \sum_{n=1}^{11} X_n l_n(Y_1) + \sum_{n=12}^{22} X_n l_n(Y_2) + \lambda(Y_1 - Y_2)$$

Cele două subprobleme independente de primul nivel sînt :

Subproblema 1 : Să se determine :

$$H_1(\lambda) = \min \Phi_1(Y_1, X_n, \lambda) = \sum_{n=1}^{11} X_n l_n(Y_1) + \lambda Y_1$$

pentru $X_n (n=1, ..., 11)$, Y_1 satisfăcînd restricțiile

$$|\sigma_n(X_n, Y_1)| \leqslant 100\,000 \; ; \; X_n > 0 \; ; \; 2{,}0 \leqslant Y \leqslant 6{,}0 \; ; \; n = 1, ..., 11$$

Subproblema 2 : Să se determine

$$H_2(\lambda) = \min \Phi_2(Y_2, X_n, \lambda) = \sum_{n=12}^{22} X_n l_n(Y_2) - \lambda Y_2$$

pentru $X_n (n=1, 2, ..., 22)$, Y_2 satisfăcînd restricțiile

$$|\sigma_n(X_n, Y_2)| \leqslant 100\,000 \; ; \; X_n > 0 \; ; \; 2{,}0 \leqslant Y \leqslant 6{,}0 \; ; \; n = 12, ..., 22$$

Considerind că relatia (3,93) este valabilă, problema de nivel doi constă în determinarea $\max H(\lambda) = H_1(\lambda) + H_2(\lambda)$ pentru toți λ pentru care $H(\lambda)$ există. Dependența lui $H(\lambda)$ de λ este arătată în figura 3.20. Soluția optimă este :

$$\lambda_{opt} = -2{,}86 \times 10^{-4} \quad Y_{1opt} = Y_{2opt} = 3{,}92\text{m}. \quad \max H(\lambda) = 8{,}58 \times 10^{-3} \text{ m}^3.$$

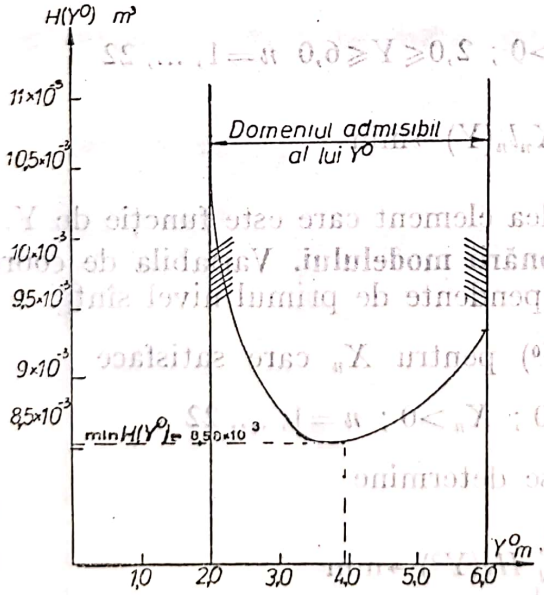


Fig. 3.19

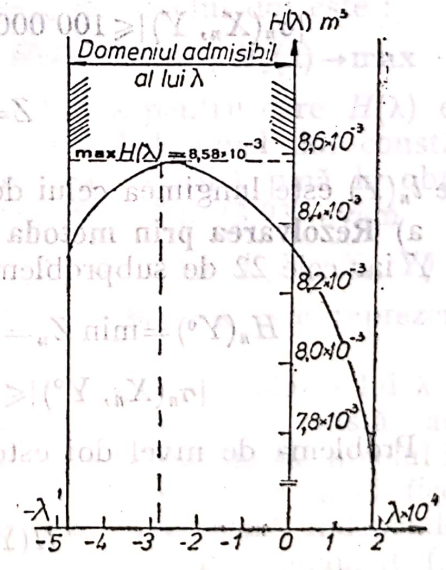


Fig. 3.20

Utilizarea metodei coordonării scopului permite calculul valorilor optime ale variabilelor inițiale direct din subprobleme. Coordonatorul de nivel doi de-

termină numai valorile multiplicatorilor. Un dezavantaj al metodei este că nu garantează nici măcar existența unei soluții de optim local în cazul problemelor neconvexe. Un alt dezavantaj este că numărul de variabile în nivelul doi este mai mare decît problema inițială în timp ce în metoda coordonării modelului numărul total de variabile rămîne neschimbat. De asemeni, valorile intermediare ale variabilelor inițiale obținute pentru valori neoptime ale multiplicatorilor nu reprezintă în general o soluție admisibilă. Astfel, rezolvarea trebuie să continue pînă la obținerea optimului deoarece rezultatele intermediare nu sînt soluții aproximative. În metoda coordonării modelului toate soluțiile intermediare sînt admisibile, astfel încît procesul iterativ se poate opri oricînd la o soluție admisibilă chiar neoptimă.

Numărul de variabile în fiecare dintre nivele este întotdeauna mai mic decît numărul lor în problema inițială. Aceasta este datorită faptului că variabilele sînt partiționate în două submulțimi de primul și al doilea nivel.

Alegerea variabilelor coordonatoare depinde de următoarele două considerații :

1. *Problema de nivel doi* trebuie să fie ușor de rezolvat. Aceasta se poate realiza din condiția ca spațiul de proiectare să fie destul de mic astfel încît optimul să fie ușor de obținut fie să existe gradienți care să permită utilizarea unor tehnici de optimizare eficiente.

2. *Problema de primul nivel* trebuie să fie formulată astfel încît să existe subprobleme independente simple.

Deoarece fiecare dintre problemele de nivelul întîi este ea însăși o problemă de optimizare cu restricții, aceste probleme pot de asemenea fi transformate în forme cu nivel doi și descompuse. Se obțin astfel forme cu multinivele. Această descompunere este utilă în situațiile cînd problema generală implică două sau mai multe subsisteme importante care la rîndul lor constau din mai multe subsisteme distincte. Metodele coordonării modelului și a coordonării scopului se pot folosi simultan pentru diferitele subsisteme ale sistemului dat.

3.3.2. Proiectarea optimă a structurilor din bare articulate cu geometrie variabilă

În această situație generală, se consideră că înafară de suprafețele secțiunilor transversale ale barelor și coordonatele nodurilor apar ca variabile de proiectare. De asemenea, restricțiile de rigiditate, eforturi unitare, deplasări ale nodurilor și ale coordonatelor se păstrează.

Problema de proiectare se enunță astfel :

Să se minimizeze

$$Z=Z(\{A\}, \{X_c\}) \tag{3.94}$$

supusă la restricțiile

$$\text{de rigiditate } K_i(\{A\}, \{X_a\}, \{X_c\})-P_i=0 \quad i=1, \ldots, NS \tag{3.95}$$

$$\text{de eforturi unitare } \sigma_i(\{A\}, \{X_a\}, \{X_c\})-\sigma_{ai}=0 \quad i=NS+1, \ldots, NS+NM \tag{3.96}$$

$$\text{deplasările nodurilor } \{X_a\}-\{X_{aa}\}<\{0\} \tag{3.97}$$

$$\text{coordonatele nodurilor } \{X^u\}<\{X_c\}<\{X^s\} \tag{3.98}$$

$$\text{restricții de nenegativitate } \{A\}, \{X_c\}>0 \tag{3.99}$$

Aici P_i este forța exterioară ce acționează în nod, $\{A\}$ este vectorul ariilor secțiunilor transversale ale barelor, $\{X_a\}$ este vectorul deplasărilor nodurilor ;

$\{X_c\}$ este vectorul coordonatelor nodurilor ; NS este numărul total de ecuații ale restricțiilor de rigiditate ; NM — numărul total de bare ale grinzii cu zăbrele. Funcția obiectiv este greutatea structurii

$$Z=\sum_{i=1}^{NM}\rho_i A_i l_i \tag{3.100}$$

ρ_i este densitatea materialului și A_i este suprafața transversală a barei i. Pentru grinzi cu zăbrele plane, lungimea elementului i, l_i, este dată de

$$l_i^2=(X_s-X_f)^2+(Y_s-Y_f)^2 \tag{3.101}$$

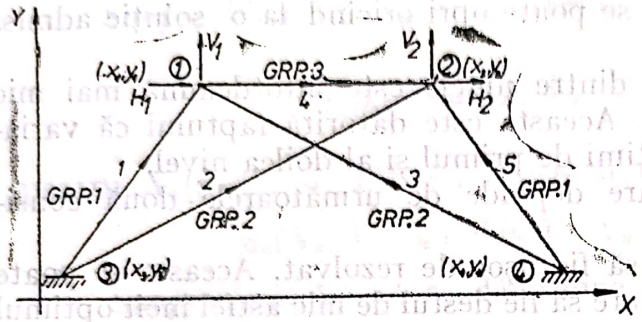


Fig. 3.21

a) **Restricțiile de rigiditate**

Utilizarea metodei matriciale a deplasărilor permite determinarea matricei de rigiditate $[K]$ a structurii. Restricțiile de rigiditate sînt egalități de forma $[K]\{X\}=\{P\}$ unde $\{P\}$ este vectorul încărcărilor exterioare.

Contribuția elementului i la matricea globală de rigiditate este (Fig. 3.21)

$$[K]=A_i\left[\begin{array}{cc|cc} B_i & C_i & -B_i & -C_i \\ C_i & D_i & -C_i & -D_i \\ \hline -B_i & -C_i & B_i & C_i \\ -C_i & -D_i & B_i & D_i \end{array}\right] \tag{3.102}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal ;

$$B_i=\frac{E(X_s-X_f)^2}{l_i^3},\quad C_i=\frac{E(X_s-X_f)(Y_s-Y_f)}{l_i^3},\quad D_i=\frac{E(Y_s-Y_f)^2}{l_i^3} \tag{Fig. 3.22}$$

Rigiditatea nodului este constituită din rigiditatea tuturor elementelor concurente în nod. Deoarece deplasările nodului sînt tratate ca variabile de proiectare, nu este necesară inversarea sau descompunerea matricei de rigiditate. Matricea globală de rigiditate a grinzii cu zăbrele cu N noduri are $2N$ linii și $2\sum_{i=1}^{N} M_i$ coloane, în care M_i este numărul total de grupuri conectate în nodul i. De exemplu, grinda din figura 3.21 are două noduri iar barele sînt împărțite în trei grupuri. Matricea globală de rigiditate are patru linii. Numărul de coloane în această matrice este de 12 și ea are forma

Nodul 1 Nodul 2

(A_1) (A_2) (A_3) (A_1) (A_2) (A_3) (A_1) (A_2) (A_3) (A_2) (A_2) (A_3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} B_1^1 & B_2^3 & B_3^4 & C_1^1 & C_2^3 & C_2^4 & 0 & 0 & -B_3^4 & 0 & 0 & -C_3^4 \\ C_1^1 & C_2^3 & C_3^4 & D_1^1 & D_2^3 & D_3^4 & 0 & 0 & -C_3^4 & 0 & 0 & -D_3^4 \\ \hline 0 & 0 & -B_3^4 & 0 & 0 & -C_3^4 & B_1^5 & B_2^2 & B_3^4 & C_1^5 & C_2^2 & C_3^4 \\ 0 & 0 & -C_3^4 & 0 & 0 & -D_3^4 & C_1^5 & C_2^2 & C_3^4 & D_1^5 & D_2^2 & D_3^4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} X_{d1} \\ Y_{d1} \\ \hline X_{d2} \\ Y_{d2} \end{array}\right]=$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ \cdots\cdots \\ H_2 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{3.103}$$

unde A_1, A_2 și A_3 sînt ariile secțiunilor transversale necunoscute ale barelor din fiecare grup ; B_k^i, C_k^i și D_k^i contribuția barei i a grupului k ; X_{d1}, Y_{d1} și X_{d2}, Y_{d2} deplasările verticale și orizontale ale nodurilor 1 și 2, H_1, V_1, H_2 și V_2 componentele forțelor P_1 și P_2 din nodurile respective. Prima restricție de rigiditate din (3.103) are forma

$$(B_1^1A_1+B_2^3A_2+B_3^4A_3)X_{d1}+(C_1^1A_1+C_2^3A_2+ \\ +C_3^4A_3)Y_{d1}-B_3^4A_3X_{d2}-C_3^4A_3Y_{d2}=H_1 \tag{3.104}$$

Restricțiile de rigiditate pentru sistemul simplu simetric din fig. 3.22 sînt :

$$2EX_1^2(X_1^2+Y_1^2)^{-3/2}\,AX_{d1}=H\,;\quad -2EY_1^2(X_1^2+Y_1^2)^{-3/2}AY_{d1}=-V$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, A aria barelor 1 și 2 ; X_1 și Y_1 coordonatele ; X_{d1} și Y_{d1} deplasările orizontală și verticală ale nodului 1. Din cauza simetriei $X_2=2X_1$. Restricțiile egalitate de mai sus sînt neliniare.

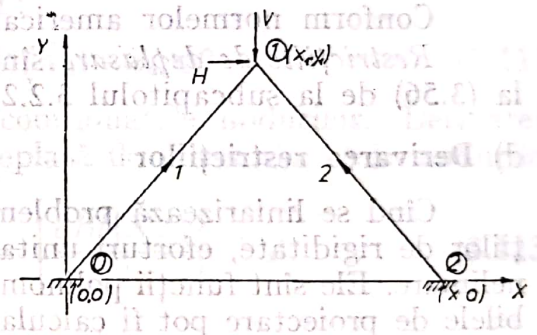


Fig. 3.22

b) **Restricțiile de eforturi unitare**

Dacă F_i este forța din elementul i iar A_i este aria secțiunii transversale a elementului i eforturile unitare trebuie să satisfacă inegalitatea

$$\left|\frac{F_i}{A_i}\right| < \sigma_{ti} \text{ sau } \sigma_{ci} \tag{3.105}$$

unde σ_{ti} și σ_{ci} sînt eforturile unitare admisibile de întindere și respectiv compresiune. Restricțiile de mai sus sînt funcții numai de deplasările și coordonatele nodurilor. Valorile deplasărilor nodurilor sînt însă obținute cu ajutorul metodei simplex după liniarizarea relațiilor, deci fiecare bară introduce numai o restricție de efort unitar în problema de proiectare.

Restricțiile de eforturi unitare pentru barele 1 și 2 ale grinzii cu zăbrele simple din figura 3.23 sînt

$$X_1(X_1^2+Y_1^2)^{-1}X_{d1}+Y_1(X_1^2+Y_1^2)^{-1}Y_{d1}<\frac{\sigma_{c1}}{E} \\ X_1(X_1^2+Y_1^2)^{-1}X_{d1}-Y_1(X_1^2+Y_1^2)^{-1}Y_{d1}<\frac{\sigma_{c2}}{E} \tag{3.106}$$

S-a considerat că ambele elemente sînt comprimate.

c) **Restricții de flambaj**

Efortul unitar critic pentru barele comprimate este dat de

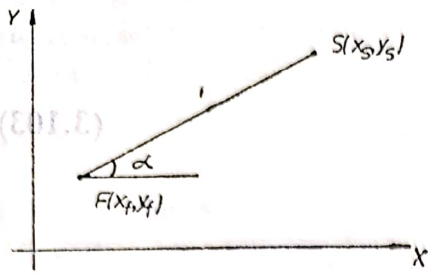


Fig. 3.23

$$\sigma_{fi}=\frac{\pi^2 E}{c\left(\frac{l_i}{r}\right)^2} \tag{3.107}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, c este coeficientul de siguranță, l_i este lungimea barei i, r este raza de girație a secțiunii transversale. Deoarece aria secțiunii este o variabilă de proiectare este necesară exprimarea razei de giratie în funcție de aceasta. Expresia este

$$r=aA^b \tag{3.108}$$

unde a și b sînt constante. Valorile acestor constante sînt luate de exemplu de 0,602 și respectiv 0,5 pentru secțiuni tubulare (după Vanderplaats și Moses) avînd raportul diametrului nominal la grosime $D/t=10$. Efortul unitar critic are acum valoarea

$$\sigma_{fi}=\frac{10{,}1\pi E A_i}{8l_i^2} \tag{3.109}$$

Conform normelor americane pentru oțel $a=0{,}393$ și $b=0{,}75$ în (3.108).

Restricțiile de deplasare sînt similare ca tratare cu cele din relațiile (3.54) la (3.56) de la subcapitolul 3.2.2.

d) **Derivarea restricțiilor**

Cînd se liniarizează problema, este necesar să se obțină derivatele restricțiilor de rigiditate, eforturi unitare și a celor critice de flambaj care sînt toate neliniare. Ele sînt funcții polinomiale iar derivatele lor exacte în raport cu variabilele de proiectare pot fi calculate direct.

Vectorul variabilelor de proiectare are forma $\{V\}=\{\{A\}, \{X_d\}, \{X_c\}\}$ unde subvectorul $\{A\}=\{A_1, \ldots, A_{NG}\}$ conține ariile celor NG grupuri de elemente, $\{X_d\}=\{X_{d1}, Y_{d1}, \ldots, X_{dN}, Y_{dN}\}$ conține deplasările celor N noduri iar $\{X_c\}=\{X_{c1}, Y_{c1}, \ldots, X_c J, Y_c J\}$ conține coordonatele celor J puncte ($J \geqslant N$).

Restricțiile de rigiditate au forma

$$S_i(\{A\}, \{X_d\}, \{X_c\})=K_i(\{A\}, \{X_c\})\{X_d\}-P_i=0 \tag{3.110}$$

unde $[K(\{A\}, \{X_d\})]$ sînt sub-matricele matricei globale de rigiditate. Derivatele restricțiilor de rigiditate în raport cu ariile, deplasările și coordonatele nodurilor sînt

$$\left[\frac{\partial S}{\partial X_{ci}}\right]=\left[\frac{\partial K(\{A\}, \{X_c\})}{\partial X_{ci}}\right]\{X_d\}\,;\quad \left[\frac{\partial S}{\partial A_i}\right]=\left[\frac{\partial K(\{A\}, \{X_c\})}{\partial A_i}\right]\{X_d\};$$
$$\left[\frac{\partial S}{\partial X_{di}}\right]=[K(\{A\}]\{X_c\}\,; \tag{3.111}$$

sau

$$\frac{\partial B_i}{\partial X_f}=-\frac{\partial B_i}{\partial Y_s}=\frac{E(X_s-X_f)\left[-2+\frac{3(X_s-X_f)^2}{l_i^2}\right]}{l_i^3}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial Y_f}=\frac{\partial B_i}{\partial Y_s}=\frac{3E(X_s-X_f)^2(Y_s-Y_f)}{l_i^5}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial X_f}=-\frac{\partial C_i}{\partial Y_s}=\frac{E(Y_s-Y_f)\left[-1+\dfrac{3(X_s-X_f)^2}{l_i^2}\right]}{l_i^3}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial Y_f}=-\frac{\partial C_i}{\partial Y_s}=\frac{E(X_s-X_f)\left[-1+\dfrac{3(X_s-X_f)^2}{l_i^2}\right]}{l_i^3}$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial Y_f}=-\frac{\partial D_i}{\partial Y_s}=\frac{E(Y_s-Y_f)\left[-2+\dfrac{3(Y_s-Y_f)^2}{l_i^2}\right]}{l_i^3};$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial X_f}=-\frac{\partial D_i}{\partial X_s}=\frac{3E(X_s-X_f)(Y_s-Y_f)^2}{l_i^3}$$

Restricțiile eforturilor unitare au forma:

$$\sigma_i(\{X_d\},\{X_c\})=B_i(\{X_c\})\{X_d\}-\sigma_{ai}\leqslant 0 \tag{3.112}$$

unde matricea $[B]$ este funcție numai de coordonatele nodurilor. Derivatele restricțiilor eforturilor unitare în raport cu deplasările și coordonatele nodurilor sînt

$$\left[\frac{\partial\sigma_i}{\partial X_{di}}\right]=[B(\{X_c\})];\quad \left[\frac{\partial\sigma_i}{\partial X_{ci}}\right]=\left[\frac{\partial B(\{X_c\})}{\partial X_{ci}}\right]\{X_d\} \tag{3.113}$$

sau

$$\sigma_i=-U_iX_{df}-V_iY_{df}+U_iX_{ds}+V_iY_{ds}\ \text{unde}\ U_i=\frac{E(X_s-X_f)}{l_i^2},\ V_i=\frac{E(Y_s-Y_f)}{l_i^2}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_f}=-\frac{\partial U_i}{\partial X_s}=E\left[\frac{-\dfrac{1}{l_i^2}+2(X_s-X_f)^2}{l_i^4}\right];\quad \frac{\partial U_i}{\partial Y_f}=-\frac{\partial U_i}{\partial Y_s}=\frac{2E(X_s-X_f)(Y_s-Y_f)}{l_i^4}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial X_f}=-\frac{\partial V_i}{\partial X_s}=\frac{2E(X_s-X_f)(Y_s-Y_f)}{l_i^4};\quad \frac{\partial V_i}{\partial Y_f}=-\frac{\partial V_i}{\partial Y_s}=E\left[\frac{-\dfrac{1}{l_i^2}+2(Y_s-Y_f)^2}{l_i^4}\right]$$

Restricțiile datorită flambajului au forma:

$$\sigma_{fi}(\{A\},\{X_d\},\{X_c\})=B_i(\{X_c\})\{X_d\}-C_i(\{A\},\{X_c\})\leqslant 0 \tag{3.114}$$

unde $C(\{A\},\{X_c\})$ se referă la eforturile unitare critice de flambaj. Derivatele acestor restricții în raport cu variabilele de proiectare sînt:

$$\left[\frac{\partial\sigma_{fi}}{\partial A_i}\right]=-\left[\frac{\partial C(\{A\},\{X_c\})}{\partial A_i}\right];\quad \left[\frac{\partial\sigma_{fi}}{\partial X_{di}}\right]=[B(\{X_c\})];$$

$$\left[\frac{\partial\sigma_{fi}}{\partial X_{ci}}\right]=\left[\frac{\partial B(\{X_c\})}{\partial X_{ci}}\right]\{X_d\}-\left[\frac{\partial C(\{A\},\{X_c\})}{\partial X_{ci}}\right] \tag{3.115}$$

e) **Rezolvarea problemei de proiectare**

Pentru rezolvarea problemei propuse se utilizează dezvoltarea în serie Taylor și se reține primii doi termeni. Astfel problema de programare neliniară este aproximată printr-o problemă de programare liniară în forma

Să se minimizeze

$$Z=Z(\{V^0\})+\nabla Z(\{V^0\})[\{V^1\}-\{V^0\}]$$

supusă la restricțiile

$$\begin{aligned} &S_i(\{V^0\})+\nabla S_i(\{V^0\})[\{V^1\}-\{V^0\}]=0\\ &\sigma_i(\{V^0\})+\nabla\sigma_i(\{V^0\})[\{V^1\}-\{V^0\}]=0\\ &\{X_a\}-\{X_{ad}\}\leqslant 0,\ (1-m)\{A^0\}<\{A^1\}<(1+m)\{A^0\} \end{aligned} \tag{3.116}$$

unde

$$\begin{aligned} &\nabla Z(\{V^0\})=\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial A^0}\right),\ \left(\frac{\partial Z}{\partial X_c^0}\right)\right];\ \nabla S_i(\{V^0\})=\left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial A^0}\right),\ \left(\frac{\partial S_i}{\partial X_a^0}\right),\ \left(\frac{\partial S_i}{\partial X_c^0}\right)\right];\\ &\nabla\sigma_i(\{V^0\})=\left[0,\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial X_a^0}\right),\ \left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial X_c^0}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.117}$$

Valorile fiecărei funcții sînt cunoscute în $\{V^0\}$, $\{V^1\}$ este vectorul variabilelor necunoscute iar m este o mărime de preselecție pentru limitele ce privesc ariile și coordonatele nodurilor.

Problema de programare liniară se rezolvă prin metoda simplex. După ce se introduc variabilele inactive și artificiale, restricțiile de rigiditate și ale eforturilor unitare se exprimă matricial astfel

$$[B]\{V\}=\{b\} \tag{3.118}$$

unde $[B]$ este matricea coeficienților iar $\{b\}$ membrul drept care rezultă din procesul de liniarizare. Vectorul $\{V\}=(\{A\},\{X_a\},\{X_c\})$ include toate variabilele necunoscute.

Procedeul de proiectare constă din următoarele etape :

1. Se alege o „structură grosieră". Aceasta se obține fie utilizîndu-se o rețea de noduri sau mai convenabil o configurație practică ce permite folosirea experienței inginerești.
2. Se grupează împreună elementele dacă aceasta este cerut.
3. Se alege un punct inițial. Valorile inițiale ale coordonatelor nodurilor $\{X_c\}$ se iau cele ale structurii grosiere. Ariile secțiunilor $\{A\}$ se pot lua arbitrar. Ele pot fi admisibile sau neadmisibile. Însă, ele trebuie să satisfacă egalitățile de rigiditate împreună cu variabilele de deplasare.
4. Se formează funcția obiectiv și restricțiile de proiectare.
5. Se calculează derivatele funcției obiectiv și a restricțiilor în raport cu variabilele de proiectare.
6. Se liniarizează funcția obiectiv și restricțiile.
7. Se utilizează metoda simplex pentru minimizarea funcției obiectiv.
8. Se repetă procesul pentru pasul 5 pînă se obține convergența la minimul funcției obiectiv.

Drept criteriu de convergență se utilizează relația

$$\frac{Z(X^{i+1})-Z(X^i)}{Z(X^i)}<\varepsilon \tag{3.119}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $Z(X^t)$ și $Z(X^{t+1})$ sînt valorile funcției obiectiv în două iterații succesive. Rezonabil este să se considere valoarea lui ε de aproximativ 0,1%.

Procedeul prezentat trebuie să fie flexibil astfel încît să corespundă cerințelor inginerești și arhitecturale, forma finală a grinzii cu zăbrele să fie acceptabilă. În acest scop procedeul de calcul se completează astfel:

1. Se pot fixa unele noduri ale grinzii cu zăbrele. Coordonatele acestor noduri nu se includ în vectorul de proiectare variabil.

2. Unele coordonate ale nodurilor grinzii cu zăbrele pot varia numai între anumite limite:

$$X^L < X_i < X^s \qquad Y^L < Y_i < Y^s \tag{3.120}$$

unde X^L, Y^L și X^s, Y^s sînt limitele inferioare respectiv superioare ale coordonatelor variabile ale nodului i, X_i, Y_i.

3. Unele noduri ale grinzii cu zăbrele se pot mișca pe o dreaptă fixată

$$Y_i = aX_i + b \tag{3.121}$$

a, b fiind constante. Cerința este importantă în proiectarea șarpantelor grinzilor cu zăbrele.

4. Un grup de noduri pot satisface cerințe de simetrie în raport cu anumite axe. De exemplu, dacă X_a, X_b și X_c sînt respectiv abscisele nodurilor A, B și C iar nodurile A și B sînt simetrice în raport cu nodul C, atunci cerința de simetrie se exprimă sub forma

$$X_a + X_b = 2X_c \tag{3.122}$$

Exemplul 3.7. Grinzi cu zăbrele plane

Se consideră grinda cu zăbrele din figura 3.24 încărcată cu forțele verticale de 150 KN în nodurile 6 și 7.

Structura grosieră sau brută a fost obținută prin unirea tuturor nodurilor, $E = 207$ KN/mm², $\sigma_t = 0{,}16$ KN/mm² (tensiune), $\sigma_c = 0{,}1$ KN/mm² (compresiune). Deplasările nodurilor 6 și 7 sînt limitate la 6,5 mm. Această structură a fost proiectată de Majid și Elliott în prima formă optimă. Ei au utilizat teoremele variației structurilor pentru a modifica structura brută în scopul micșorării greutății ei pînă ce nu mai sînt posibile alte îmbunătățiri topologice. Forma optimă obișnuită este reprezentată în figura 3.24 b. Ariile finale sînt reprezentate în tabelul 3.7. Structura este simetrică, static determinată și are volumul $7{,}6 \times 10^7$ m³.

Aceeași grindă cu geometrie fixată a fost propusă de M.P. Saka, dar ariile și deplasările nodurilor au fost luate drept variabile de proiectare.

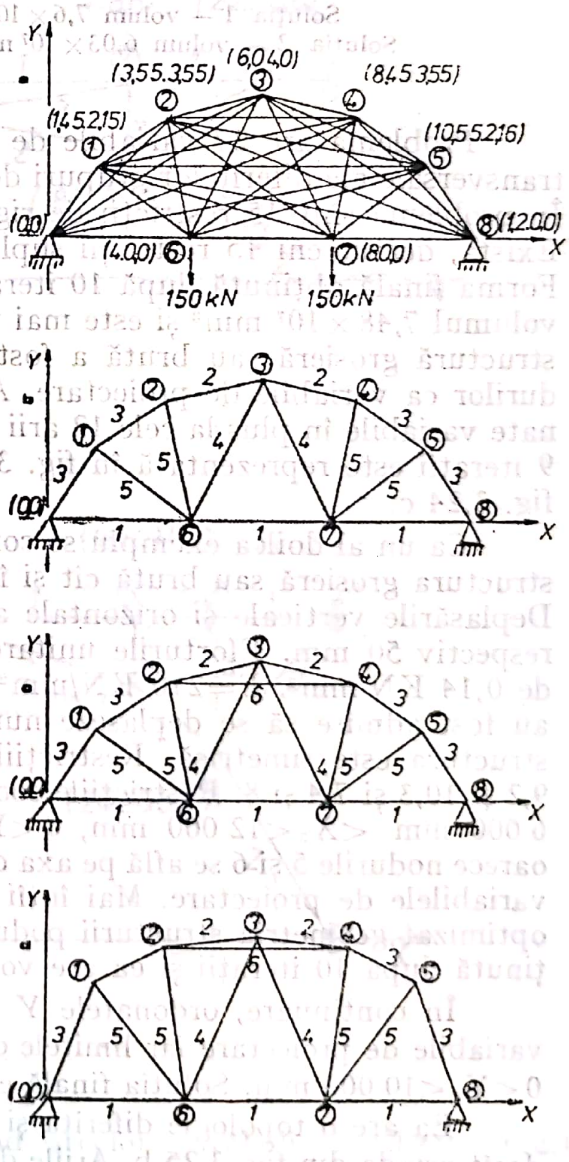


Fig. 3.24

Tabelul 3.7

Ariile grupurilor (mm^2)	Soluția 1	Soluția 2	Soluția 3
A_1	1 742,7	2 037	1 192
A_2	1 809,8	1 908	488
A_3	2 289,6	2 267	2 086
A_4	562,1	333	81
A_5	1 275,5	943	677
A_6	0,0	346	812

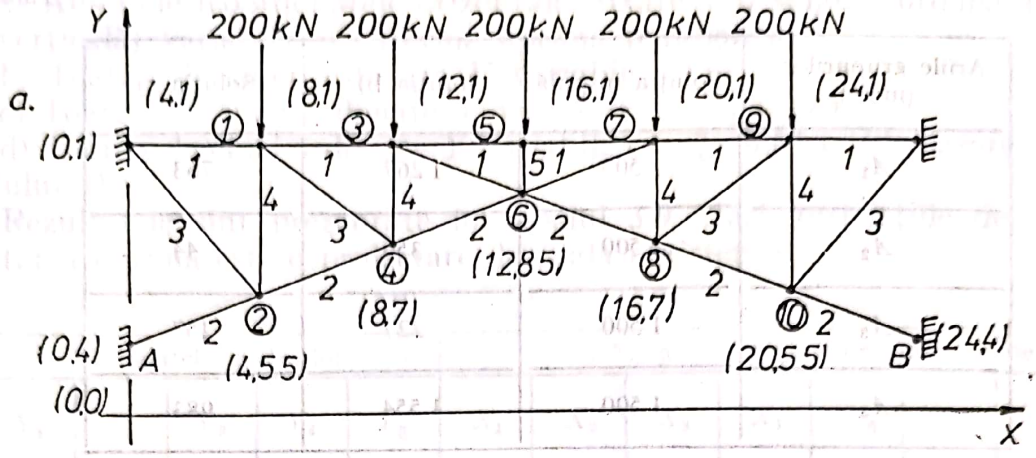
Soluția 1 — volum $7{,}6 \times 10^7$ mm³ ; Soluția 2 — volum $7{,}48 \times 10^7$ mm³ ; Soluția 2 — volum $6{,}03 \times 10^7$ mm³

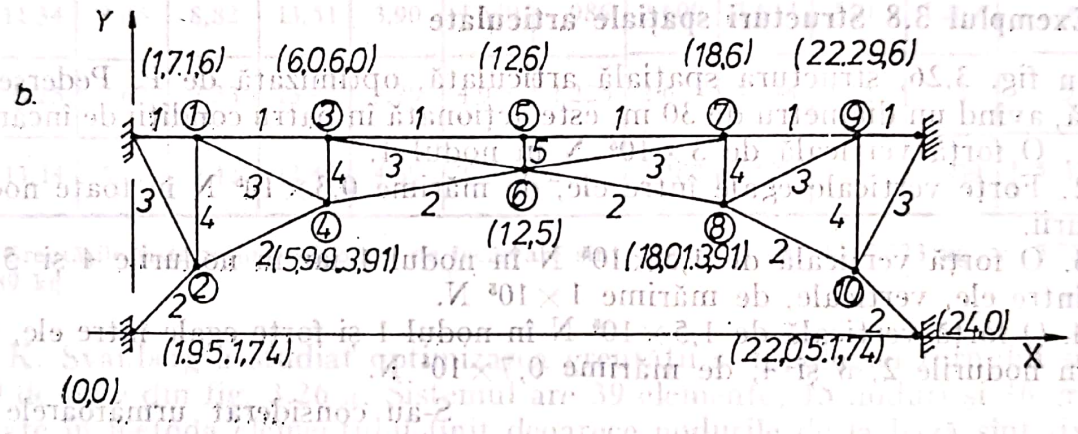
Problema are 27 variabile de proiectare, din care 12 sînt ariile secțiunilor transversale ale diferitelor grupuri de bare iar celelalte sînt deplasări ale nodurilor. În problemă sînt 15 restricții de rigiditate și 33 restricții ale eforturilor unitare. Există, deasemeni 15 restricții suplimentare de deplasări și 24 de limite mobile. Forma finală obținută după 10 iterații este reprezentată în figura 3.23 c. Ea are volumul $7{,}48 \times 10^7$ mm³ și este mai ușoară decît grinda din figura 3.23 b. Aceeași structură grosieră sau brută a fost proiectată considerîndu-se coordonatele nodurilor ca variabile de proiectare. Această problemă de proiectare are 9 coordonate variabile în plus la cele 12 arii și 15 deplasări. Forma optimă, obținută după 9 iterații este reprezentată în fig. 3.24 d. Aceasta este mai ușoară decît cea din fig. 3.24 c.

Ca un al doilea exemplu se consideră structura podului din fig. 3.25 a. Atît structura grosieră sau brută cît și încărcarea sînt reprezentate în această figură Deplasările verticale și orizontale ale nodurilor au fost limitate între 10 mm și respectiv 50 mm. Eforturile unitare admisibile de tensiune și compresiune sînt de 0,14 KN/mm². E=210 KN/mm². Pentru rațiuni practice nodurile 1, 3, 7 și 9 au fost admise să se deplaseze numai pe orizontală. Din motive arhitecturale, structura este simetrică. Restricțiile de simetrie au fost impuse nodurilor 1 și 9,2 și 10,3 și 7,4 și 8. Restricțiile coordonatelor nodurilor sînt : $0 < X_1 < 6\,000$ mm, $6\,000$ mm $< X_3 < 12\,000$ mm, $0 < Y_6 < 9\,000$ mm, $0 < Y_2$, $Y_4 < 10\,000$ mm. Deoarece nodurile 5 și 6 se află pe axa de simetrie, abscisele lor nu sînt incluse printre variabilele de proiectare. Mai întîi au fost fixate reazemele A și B și apoi s-a optimizat geometria structurii podului. Forma optimă din fig. 3.25 b a fost obținută după 10 iterații și ea are volumul $16{,}2 \times 10^7$ mm³.

În continuare, ordonatele Y ale reazemelor A și B s-au considerat drept variabile de proiectare iar limitele de variație ale lui Y_{c6} au fost modificate astfel $0 < Y_6 < 10\,000$ mm. Soluția finală este reprezentată în fig. 3.24 c.

Ea are o topologie diferită și volumul de $15{,}73 \times 10^7$ mm³ deci mai ușoară decît grinda din fig. 3.25 b. Ariile diferitelor grupuri sînt date în tab. 3.8.





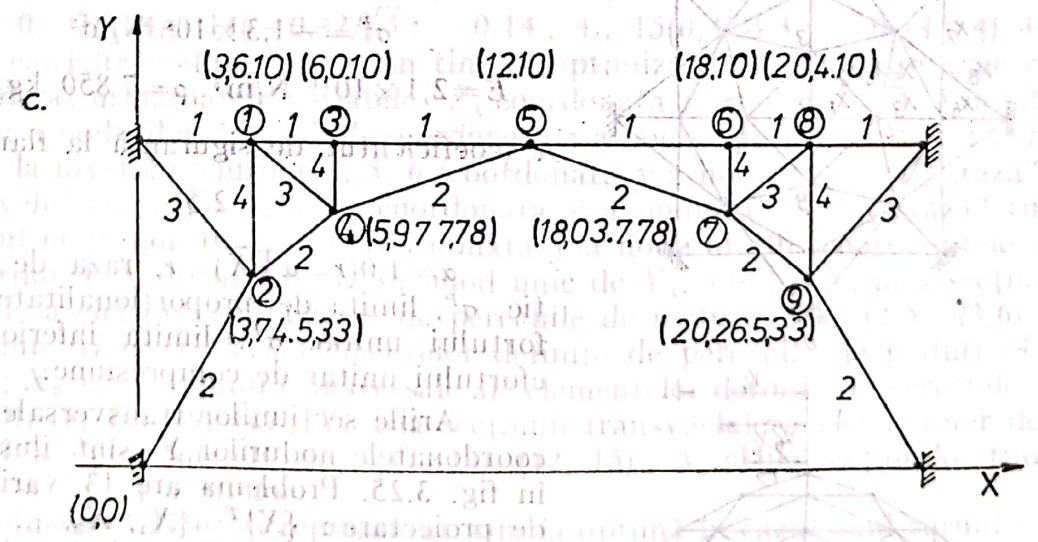


Fig. 3.25

Soluțiile optime prezentate corespund arcelor parabolice utilizate mult în practică.

Tabelul 3.8

Ariile grupurilor (mm^2)	Soluția inițială	Soluția b)	Soluția c)
A_1	1 500	1 267	763
A_2	1 500	356	44
A_3	1 500	227	157
A_4	1 500	1 554	983

Soluția inițială — volum $3{,}03 \times 10^7$ mm^3; Soluția b — volum $1{,}79 \times 10^7$ mm^3; Soluția c — volum $1{,}112 \times 10^7$ mm^3

Exemplul 3.8 Structuri spațiale articulate

În fig. 3.26, structura spațială articulată, optimizată de P. Pedersen, simetrică, avînd un diametru de 30 m, este acționată în patru condiții de încărcare :

1. O forță verticală de 3×10^5 N în nodul 1.
2. Forțe verticale egale între ele, de mărime $0{,}3 \times 10^5$ N în toate nodurile structurii.
3. O forță verticală de $1{,}5 \times 10^5$ N în nodul 1 iar în nodurile 4 și 5 forțe egale între ele, verticale, de mărime 1×10^5 N.
4. O forță verticală de $1{,}5 \times 10^5$ N în nodul 1 și forțe egale între ele, verticale, în nodurile 2, 3 și 4, de mărime $0{,}7 \times 10^5$ N.

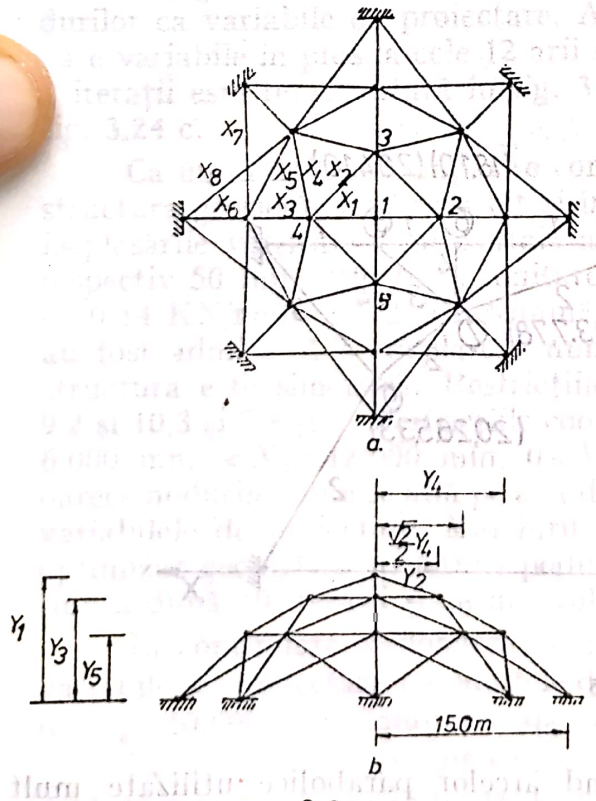


Fig. 3.26

S-au considerat următoarele date prestabilite :

$$\sigma^S = 1{,}3 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \quad \sigma^L = -1{,}04 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma^P = -1{,}3 \times 10^8 \text{ N/m}^2$$

$$E = 2{,}1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad \rho = 7\,850 \text{ kg/m}^3$$

c (coeficientul de siguranță la flambaj) $= 2{,}5$

$\alpha = 1{,}0 (r = \alpha \sqrt{X}) - r$, raza de giație, σ^P, limita de proporționalitate a efortului unitar σ^L, limita inferioară a efortului unitar de compresiune.

Ariile secțiunilor transversale X și coordonatele nodurilor Y sînt ilustrate în fig. 3.25. Problema are 13 variabile de proiectare : $\{X\}^T = \{X_1, X_2, \ldots, X_8\}$ — $\{Y\}^T = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_5\}$. Limita inferioară a ariilor secțiunilor transversale este $X_i^L = 1 \times 10^{-6}$ $(i = 1, \ldots, 8)$. Funcția obiectiv este greutatea structurii. P. Pedersen a rezolvat următoarele cazuri :

Scanned with OKEN Scanner

a) Abscisele (coordonatele orizontale) fixate și o singură ordonată (coordonata verticală) variabila, Y_1 (forma optimă parabolică).

b) Toate cele cinci ordonate Y variabile ;

c) Toate cele cinci ordonate Y variabile cu $Y_1^s = 9{,}25$ m.

d) Toate cele cinci ordonate Y variabile cu $u_1^s = 0{,}01$ m (deplasarea verticală a nodului 1).

Rezultatele sînt prezentate în tabelul 3.9. Fără restricțiile de deplasare, proiectarea optimă este o proiectare de egală rezistență.

Tabelul 3.9

Cazul	Ordonatele nodurilor					$10^6 \times$ ariile secțiunilor transversale							
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
a	9,25	5,00	8,22	10,00	5,14	4 399	1 437	2 424	2 925	499	2 769	1 711	1 325
b	11,34	8,05	8,82	13,51	3,90	4 649	986	2 609	3 611	510	1 269	1	427
c	9,25	7,67	7,33	13,42	3,20	4 936	1 225	2 665	3 818	615	1 136	5	451
d	13,14	5,77	9,42	12,45	4,69	2 806	2 723	3 163	3 620	517	1 839	1 573	205

Greutățile sistemului pe ipoteze de încărcare sînt : a) 6 675 kg ; b) 5 623 kg ; c) 5 733 kg ; d) 5 989 kg

K. Svanberg a studiat optimizarea greutății și topologiei turnului simetric cu 39 de bare din fig. 3.26 a. Sistemul are 39 elemente, 15 noduri și 36 grade de libertate în metoda elementului finit deoarece nodurile de la bază sînt fixe. Următoarele noduri sînt fixe : $1(0,\ 1,\ 0)$, $2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, $3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ ;\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$; $13(0,\ 0,\ 28,\ 4)$, $14(-0{,}42/\sqrt{3}\ ;\ -0{,}14\ ,\ 4)$, $15(0{,}42/\sqrt{3}\ ;\ -0{,}14\ ;\ 4)$. Coordonatele celorlalte noduri variază în timpul optimizării. Turnul este simetric și s-au considerat următoarele variabile ; Z_1 coordonata z a nodurilor 4, 5, 6 ; Z_2 coordonata z a nodurilor 7, 8, 9 ; Z_3 coordonata z a nodurilor 10, 11, 12 ; Y_1 „raza" turnului la nivelul nodurilor 4, 5, 6 (coordonata y a nodului 4) ; Y_2 „raza" turnului la nivelul nodurilor 7, 8, 9 (coordonata y a nodului 7) ; Y_3 „raza" turnului la nivelul nodurilor 10, 11 12 (coordonata y a nodului 10) (coordonatele x și y ale nodurilor 4, 5, 6 sînt definite în mod unic de Y_1, etc.) ; X_1 aria secțiunii transversale a elementelor definite de perechile de noduri (1,4), (2,5), (3,6) ; X_2 aria secțiunii transversale a elementelor definite de perechile de noduri (4,7), (5,8), (6,9) ; X_3 aria secțiunii transversale ale elementelor definite de perechile de noduri (7, 10), (8, 11), (9, 12) ; X_4 aria secțiunii transversale a elementelor definite de perechile de noduri (10, 13), (11, 14), (12, 15) ; X_5 ariile secțiunilor transversale ale restului elementelor.

În fig. 3.27 b s-a reprezentat soluția optimă în cazul cînd turnul este acționat de trei forțe orizontale identice, în nodurile 13, 14, 15, în direcția pozitivă a axei y și cînd suma deplasărilor în direcția pozitivă a axei y a celor trei noduri extreme nu depășește o anumită valoare fixată apriori. În acest caz, după 40 de iterații s-a obținut greutatea minimă de 66,8 și $Z_1 = 1{,}34$, $Z_2 = 2{,}49$, $Z_3 = 3{,}40$, $Y_1 = 0{,}87$, $Y_2 = 0{,}71$, $Y_3 = 0{,}46$. În figura 3.27 b cifrele reprezintă valorile varia-

bilelor X. Se notează că soluția optimă a acestei probleme este independentă de mărimea încărcării. Astfel, dacă încărcarea este dublată, geometria optimă rămîne aceeași, în timp ce ariile optime ale secțiunilor transversale se dublează, raportul între ele rămînînd nemodificat.

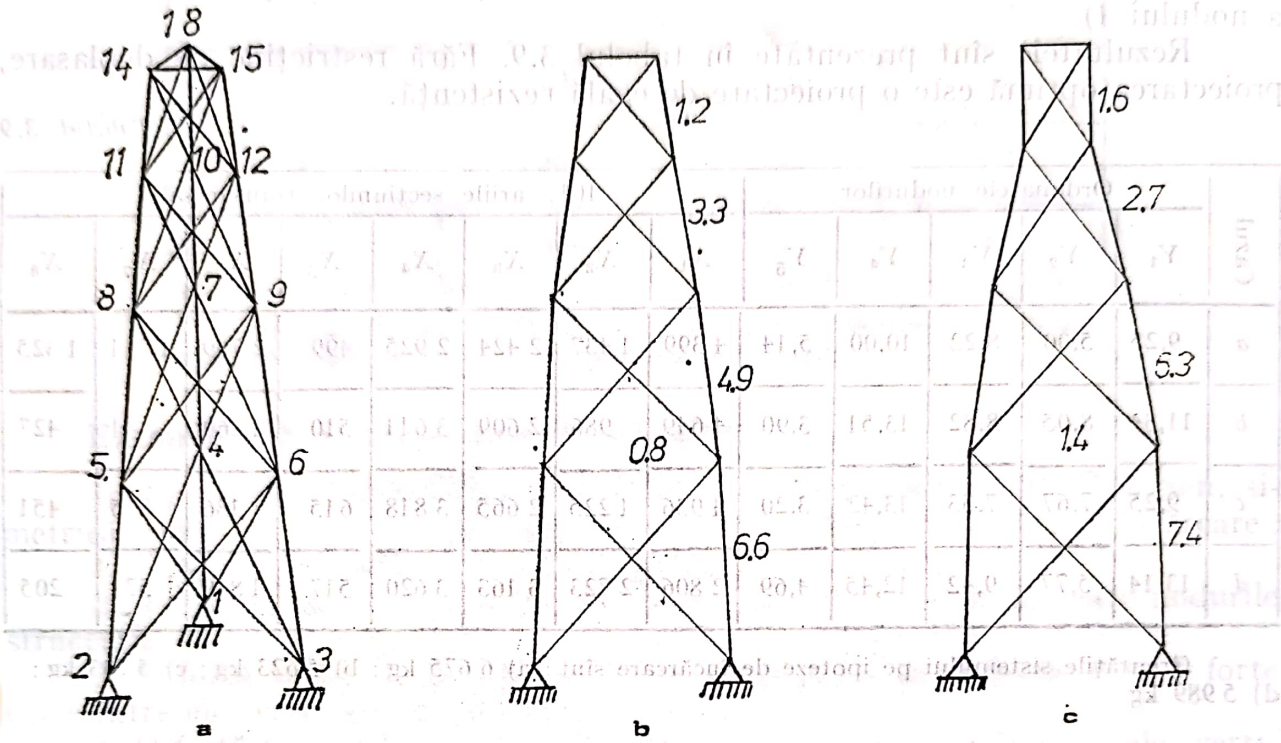


Fig. 3.27

În fig. 3.26 c se reprezintă soluția optimă în cazul cînd turnul este acționat de trei forțe identice de tipul $(0, P, -2P)$ în nodurile 13, 14, 15 și sînt impuse restricții de flambaj. Funcția obiectiv este greutatea minimă. În figură sînt valorile variabilelor X. După 24 de iterații s-a obținut : $Z_1=1{,}46$, $Z_2=2{,}79$, $Z_3=3{,}46$, $Y_1=0{,}83$, $Y_2=0{,}43$, $Y_3=0{,}30$, iar greutatea minimă de 90,0.

Și această soluție este independentă de mărimea încărcării. Dacă încărcarea se dublează geometria rămîne aceiași în timp ce secțiunile transversale cresc cu factorul $\sqrt{2}$.

OPTIMIZAREA STRUCTURILOR LA ACȚIUNI DINAMICE

4.1 Optimizarea cadrelor plane simple și contravîntuite acționate dinamic fără interacțiune cu fundația

S-au realizat în practică multe programe de calcul pentru proiectarea antiseismică a structurilor, ce astfel devin mult mai raționale și mai reliable. Aceste programe sînt alcătuite astfel încît structura să îndeplinească restricțiile impuse : de deplasări, eforturi unitare, frecvențe, ductilitate, dimensiuni ale elementelor etc. Progresele din tehnologia calculatoarelor au permis realizarea de programe de calcul sofisticate pentru analiza structurilor complexe. Atunci cînd se utilizează astfel de programe pentru proiectare, trebuie să se considere valori pentru rigiditatea relativă a elementelor constitutive.

Dacă rigiditățile preliminare sînt greșit estimate, analizele repetate cu programele de calcul complexe nu pot conduce la o proiectare eficientă.

După datele din literatura de specialitate utilizarea programelor de calcul nu garantează, în special în proiectarea antiseismică o înaltă eficiență.

De aici rezultă că utilizarea calculatoarelor în proiectarea convențională este mai curînd o artă decît știință.

În ultimii zece ani au apărut cercetări intense în domeniul proiectării optime a structurilor acționate dinamic. În general, metodele utilizate au diverse limitări și se adaptează bine pentru anumite categorii de probleme.

Astfel, în proiectarea optimă antiseismică a structurilor cele mai multe studii se bazează pe tehnica de liniarizare și pe utilizarea forțelor seismice echivalente static. O altă tehnică întrebuințată în proiectarea optimă a structurilor în cadre acționate dinamic, ținînd cont de amortizare, se bazează pe efectele momentelor de ordinul doi, $P-\Delta$, în metoda direcției admisibile.

În general se remarcă faptul că în proiectarea antiseismică domeniul admisibil al variabilelor depinde de cerințele standardelor, iar minimizarea costului total este asociată cu maximizarea beneficiului total minus costul total ; funcția de performanță include costul construcției și pagubele așteptate.

4.1.1. Metoda criteriului de optimalitate pentru proiectarea optimă a cadrelor acționate simultan static și dinamic

Ecuația de mișcare a unui sistem cu mai multe grade de libertate acționat simultan de o excitație dinamică $\{F(t)\}$ și de forțe statice $\{P_0\}$ este următoarea :

$$([M_a]+[M_s])\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+([K_s]-[K_g])\{X_0\}=\{F(t)\}+\{P_0\} \qquad (4.1)$$

unde $\{X_b\}$ include deplasările statice și dinamice, $[M_n]$ și $[M_s]$ sînt respectiv matricele masă nestructurale și structurale, $[C]$ este matricea de amortizare, $[K_s]$ este matricea de rigiditate elastică iar $[K_g]$ este matricea geometrică sau matricea de ordinul doi. Vectorul forță dinamic $\{F(t)\}$ se poate exprima în funcție de masa $[M]=[M_s]+[M_n]$ și accelerația terenului, $\ddot{X}_g$ sau de forțele aplicate $\{P\}\{f(t)\}$.

Dacă $\{X\}=[\Phi]\{Z\}$, unde $[\Phi]$ este matricea modală, atunci deplasarea modală în modul i este

$$Z_i(t)=P_i^* u_i(t)+P_{0i}^* \tag{4.2}$$

Soluția răspuns a stării stabile a sistemului este

$$u_i(t)=\frac{1}{\omega_{di}}\int_0^t f(\tau)e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_{di}(t-\tau)d\tau\ ;\quad P_i^*=\frac{1}{\overline{M}_i}\{\Phi_i\}^T\{P\}\ \text{(pentru acțiuni dinamice)}$$

$$P_i^*=-\frac{1}{\overline{M}_i}\{\Phi_i\}^T[M]\{\ddot{X}_g\}\ \text{(pentru accelerațiile terenului)}\ ;\quad P_{0i}^*=\frac{1}{\overline{M}_i}\{\Phi\}^T\{P_0\} \tag{4.3}$$

$$\overline{M}_i=\{\Phi_i\}^T[M]\{\Phi_i\},\quad \omega_{di}=\omega_i\sqrt{(1-\xi_i^2)}$$

unde ξ_i este fracțiunea din amortizarea critică iar ω_i frecvența neamortizată proprie în modul i.

Se consideră o excitație dinamică arbitrară, după F.Y. Cheng și D. Srifuengfung, cu variație liniară pe porțiuni (fig. 4.1) de forma

$$f(t)=a+bt \tag{4.4}$$

Substituind (4.4) în $u_i(t)$ se obține

$$u_i(t)=e^{-\xi_i\omega_i t}\left\{\left[u_i(t_1)-\frac{a}{\omega_i^2}+\frac{2\xi_i b}{\omega_i^3}\right]\cos\omega_{di}t+\frac{1}{\omega_{di}}\left[\dot{u}_i(t)+\xi_i\omega_i u_i(t_1)-\right.\right. \tag{4.5}$$
$$\left.\left.-\frac{\xi_i a}{\omega_i}+\frac{(2\xi_i^2-1)b}{\omega_i^2}\right]\sin\omega_{di}t\right\}+\left[\frac{a+bt}{\omega_i^2}-\frac{2\xi_i b}{\omega_i^3}\right]$$

și respectiv viteza

$$\dot{u}_i(t)=e^{-\xi_i\omega_i t}\left\{\left[\dot{u}_i(t_1)-\frac{b}{\omega_i^2}\right]\cos\omega_{di}t+\right. \tag{4.6}$$
$$+\frac{1}{\omega_{di}}\left[a-\omega_i^2u_i(t_1)-\xi_i\omega_i\left(\dot{u}_i(t_1)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{b}{\omega_i^2}\right)\right]\sin\omega_{di}t\right\}+\frac{b}{\omega_i^2}$$

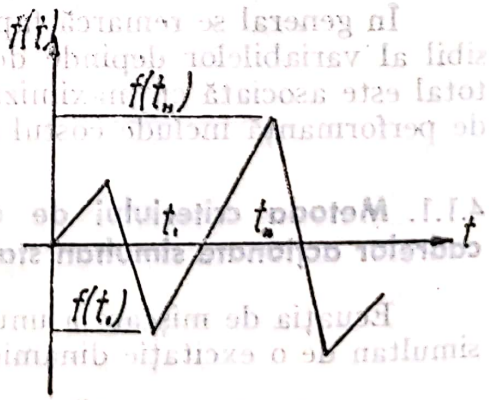


Fig. 4.1

În relațiile (4.5) și (4.6) $u(t_1)$ și $\dot{u}_i(t_1)$ sînt condițiile inițiale pentru porțiunea liniară între t_1 și t_{11} ; a și b sînt $f(t_1)$ și $[f(t_{11})-f(t_1)]/(t_{11}-t_1)$.

Condițiile inițiale de repaus sînt utilizate pentru prima porțiune liniară.

Viteza $\dot{u}(t)$ și deplasarea $u(t)$ sînt utili-

zate pentru calculul valorilor finale care sînt condiții inițiale pentru ramura liniară următoare.

Mișcarea seismică are un caracter aleator. Folosind relațiile (4.3) se poate determina deplasarea seismică spectrală. Deși deplasarea spectrală este utilizată mult mai direct, în analiza seismică se folosește în general accelerația spectrală, deoarece ea dă o măsură a accelerației efective și se exprimă ca o fracțiune adimensională a accelerației gravitaționale, g:

$$S_a(\omega,\xi)=\omega^2 u_{max} \tag{4.7}$$

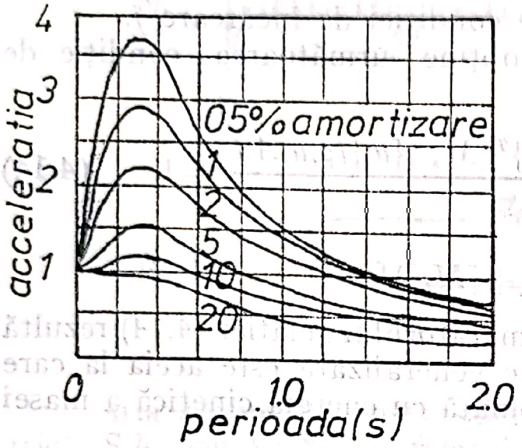


Fig. 4.2

unde u_{max} rezultă din integrarea primei relații (4.3) pentru o înregistrare seismică dată. Fig. 4.2 arată spectrul accelerației medii obținut prin normalizarea spectrului componentelor seismice a opt seisme : El Centro 1934, El Centro 1940, Olympia 1949, Tehachapi 1952 etc. ce au diferite perioade naturale și rapoarte de amortizare. Ordonatele curbelor spectrului mediu au fost multiplicate cu diverși factori de scară pentru a fi în corespondență cu mișcările terenului măsurate individual.

a) **Criteriul de optimalitate și relația de recurență**

Problema de optimizare se enunță astfel : să se minimizeze funcția obiectiv :

$$W(X)=\sum_{i=1}^{m+n}\rho_i\mu_i X_i l_i \tag{4.8}$$

supusă la restricțiile :

$$g_j(X)\leqslant b_j \tag{4.9}$$

unde $W(X)$ este greutatea structurii, i numărul elementului, ρ — densitatea materialului, l lungimea elementului, m și n sînt respectiv numărul total de stîlpi și grinzi și numărul total de contravîntuiri, X — variabilele de proiectare : momentul de inerție, I, pentru stîlpi și grinzi, aria secțiunii transversale, A, pentru contravîntuiri și $\mu=A/I$ care devine 1 pentru contravîntuiri. $g_j(X)$ din relația (4.9) reprezintă restricția încărcării j care se exprimă sub forma cerinței de rigiditate a sistemului.

Se introduce noua funcție $\psi(A,\lambda)$, obținută prin combinarea relațiilor (4.8) și (4.9) cu ajutorul multiplicatorului Lagrange :

$$\psi(A,\lambda)=W(A)-\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\lambda_j}[g_j(A)-b_j] \tag{4.10}$$

Condiția necesară de staționaritate pentru $\psi(A,\lambda)$ este $\partial\psi(A,\lambda)/\partial A=0$. Din (4.10), condiția de optimalitate are expresia :

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{e_{ji}}{\lambda_j}=1 \tag{4.11}$$

unde

$$e_{ji}=\frac{[\partial/\partial A_i)[g_j(A)]}{(\partial/\partial A_i)[W(A)]} \tag{4.12}$$

în care e_{ji} reprezintă funcția densitate de energie a structurii ce depinde de tipul de restricție.

Deoarece rigiditatea dinamică în orice mod natural se poate exprima sub forma raportului Rayleigh, restricția $g_j(X)$ în cazul răspunsului dinamic general se poate scrie aproximativ astfel :

$$g_j(A) = \frac{\{u_j\}^T([K_s]-[K_g])\{u_j\}}{\{u_j\}^T([M_n]+[M_s])\{u_j\}} \tag{4.13}$$

unde $\{u_j\}$ este vectorul deplasare ce corespunde condiției de încărcare j.

Substituind (4.13) în (4.11) și (4.12) se obține următoarea condiție de optimalitate :

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{[\{u_j\}^T([K_s]_i - G_i[K_g]_i)\{u_j\} - g_j(A)\{u_j\}^T[M_s]_i\{u_j\}/\rho_i u_i A_i l_i}{\Gamma_j} = 1 \tag{4.14}$$

în care

$$G_i = \rho_i A_i l_i, \quad \Gamma_j = \lambda_j \{u_j\}^T([M_s]+[M_n])\{u_j\}$$

G_i este masa elementului i. Din examinarea numărătorului relației (4.14) rezultă că structura optimă pentru cerința de rigiditate generalizată este aceia la care densitatea de energie de deformație medie combinată cu energia cinetică a masei ei este aceiași pentru toate elementele.

Pentru simplificare, relația de recurență pentru condiția de optimalitate se obține din (4.14) pentru o singură condiție de încărcare sub forma

$$\Gamma = \frac{\{u_j\}^T([K_s]_i - G_i[K_g]_i)\{u_j\} - g_j(A)\{u_j\}^T[M_s]_i\{u_j\}}{\rho_i u_i A_i l_i} \tag{4.15}$$

Dacă variabila de proiectare, X_i, se exprimă sub forma unei variabile relative, α_i, atunci $A_i = \Delta\alpha_i$ unde Δ este un factor de scară. Relația de recurență pentru redimensionarea variabilelor de proiectare relative se deduce din (4.15) astfel

$$(\alpha_i\Delta)^{(k+1)} = c^{1/2}(\alpha_i)^{(k)}[u_i'/\tau_i']^{1/2} \tag{4.16}$$

unde k este ciclul de iterație, $c = 1/\Gamma$

$$u_i' = \{u\}^T([K_s]_i - G_i[K_g]_i\{u\} - g(A)\{u\}^T[M_s]_i\{u\}\Delta \tag{4.17}$$

și

$$\tau_i' = \rho_i \varepsilon_i \alpha_i l_i \tag{4.18}$$

Pentru o încărcare statică uniformă ce acționează pe grinzi, expresia $\{u\}^T[K_s]_i\{u\}$ în (4.17) se poate utiliza direct sub formă de forțe concentrate în diferite puncte. Aproximarea acestor forțe echivalente poate cere o capacitate sporită de memorie și timp de calcul exagerat. Pentru a elimina acest inconvenient se determină deplasarea utilizînd expresia energiei potențiale de deformație pentru un element acționat de încărcarea uniformă q

$$u = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx = \frac{2EI}{l}\left[\theta_i^2 + \theta_i\theta_k + \theta_k^2 + \frac{3}{l}(\theta_j+\theta_k)(\delta_j-\delta_k) + \frac{3}{l^2}(\delta_j-\delta_k)^2\right] + \frac{q^2l^5}{1\,440\,EI} \tag{4.19}$$

unde deformațiile pozitive sînt arătate în fig. 4.3.

Formularea matematică prezentată se poate aplica la diferite tipuri de structuri din bare sau elemente finite. Programele elaborate sînt realizate pentru structuri din oțel ale căror elemente sînt profile laminate (fig. 4.4).

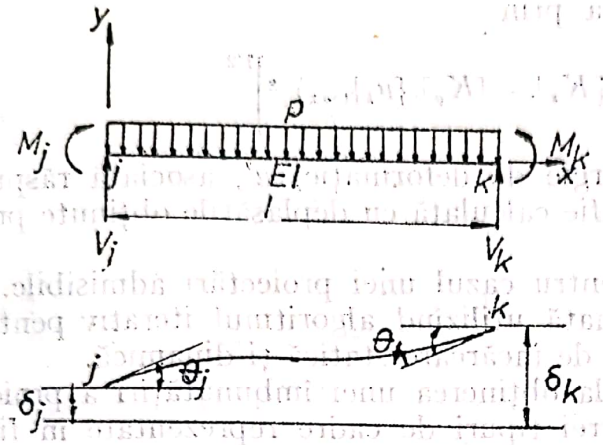


Fig. 4.3

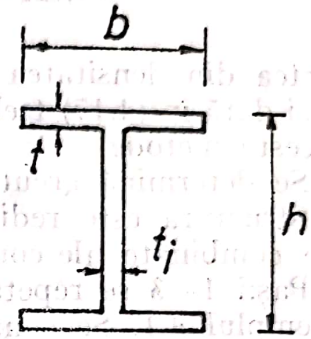


Fig. 4.4

Aria secțiunii transversale, A, momentul de inerție, I, și mărimea geometrică S/bI sînt date de relațiile :

$$A = 2bt + h_i t_i \tag{4.20}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-t_i)h_i^3}{12} \tag{4.21}$$

$$\frac{S}{bI} = \frac{1}{bI}\left[bt(h_i+t) + \frac{1}{4}t_i h_i^2\right] \tag{4.23}$$

Limitele superioare și inferioare ale variabilelor sînt următoarele :

$$h_{min} \leqslant h \leqslant h_{max} \; ; \; \left(\frac{t}{h}\right)_{min} \leqslant \frac{t}{h} \leqslant \left(\frac{t}{h}\right)_{max} \; ; \; t \geqslant t_{min} \; ; \; t_i \geqslant (t_i)_{min} \; ; \; b \geqslant b_0 \tag{4.24}$$

Contravîntuirile sînt considerate drept elemente secundare supuse numai la forțe axiale. Variabila de proiectare a contravîntuirilor este aria secțiunii transversale.

b) **Procedeul de optimizare**

Procedeul pas cu pas utilizat pentru algoritmul iterativ este :

1. Structura este analizată pentru diferite condiții de acționare statică, considerînd un vector inițial relativ de proiectare corespunzător unor dimensiuni egale ale tuturor elementelor. Aceiași structură este analizată dinamic, determinînd răspunsul ei la acțiunea dată. Structura este redimensionată corespunzător eforturilor unitare combinate statice și dinamice precum și cerințelor de deplasare. Răspunsul dinamic se poate obține cu următoarele trei metode :
   — suprapunerea directă a modurilor dorite;
   — suprapunerea valorilor absolute ale modurilor dorite ;
   — rădăcina de ordinul doi a sumei pătratelor modurilor dorite.

Primele două metode se aplică direct. Ultima metodă determină vectorul deplasării maxime totale, $\{u_i\}_{max}$ astfel

$$\{u_k\}_{max} = \left[\sum_{k=1}^{DM} |u_k|^2_{max}\right]^{1/2} \tag{4.25}$$

unde k este numărul modurilor dorite a fi utilizate. Similar, forța internă maximă din elementul i se poate aproxima prin

$$\{S_i\}_{max} = \left[\sum_{k=1}^{DM} |([K_s]_i - [K_g]_i\{u_k\}_{max})|^2\right]^{1/2} \tag{4.26}$$

Partea din densitatea de energie de deformație, u', asociată răspunsului dinamic și dată în (4.17) trebuie să fie calculată cu deplasările obținute prin una dintre aceste metode.

2. Se determină greutatea pentru cazul unei proiectări admisibile.

3. Structura este redimensionată utilizînd algoritmul iterativ pentru răspunsurile combinate ale condițiilor de încărcare statică și dinamică.

4. Pașii 1—3 se repetă pînă la obținerea unei îmbunătățiri a proiectării.

Exemplul 4.1. Se consideră trei tipuri de cadre reprezentate în fig. 4.5, avînd deschiderea $l=6{,}40$ m, înălțimea etajului $H=3{,}66$ m, încărcarea utilă pe fiecare etaj $q=3\,210{,}2$ daN/m, $E=2{,}1\times10^6$ daN/cm², densitatea $\rho=783{,}34$ kg/m³. Excitația dinamică se datorează numai accelerației solului $\ddot{X}_{gh}$ pentru care se consideră accelerația spectrală medie din fig. 4.2 cu 5% amortizare și 0,27 g. Efortul unitar admisibil de încovoiere combinat cu cel dat de forța axială este $\sigma_{ai} \leqslant 2\,000$ daN/cm² iar efortul unitar admisibil de forfecare trebuie să fie mai mic sau egal decît 0,65 σ_{ai}. Deși se pot impune deplasări admisibile diferite pentru noduri, deplasarea admisibilă considerată aici este $(H_i - H_{i-1})0{,}005$ adică 0,005 ori înălțimea etajului. Frecvența fundamentală naturală este permisă să varieze

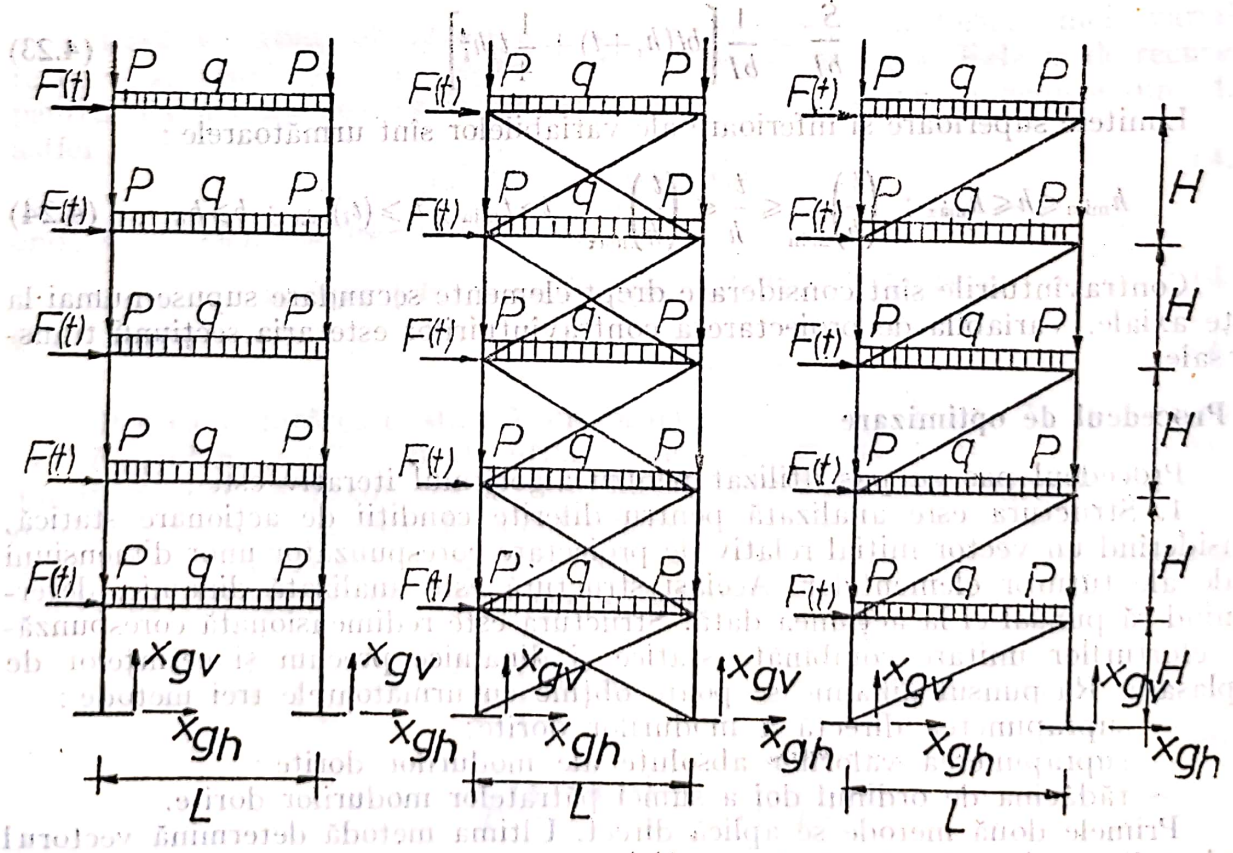


Fig. 4.5

între 5 rad/sec și 100 rad/sec. Alte restricții sînt : $b=25{,}4$ mm, $h_{max}=91{,}44$ mm, $h_{min}=20{,}32$ mm; $(t/h)_{min}=0{,}023$ $t_i/h=0{,}02$ iar aria contravîntuirilor este considerată mai mică decît 25,80 cm². Răspunsurile dinamice sînt obținute prin suprapunerea directă a primelor trei moduri fundamentale.

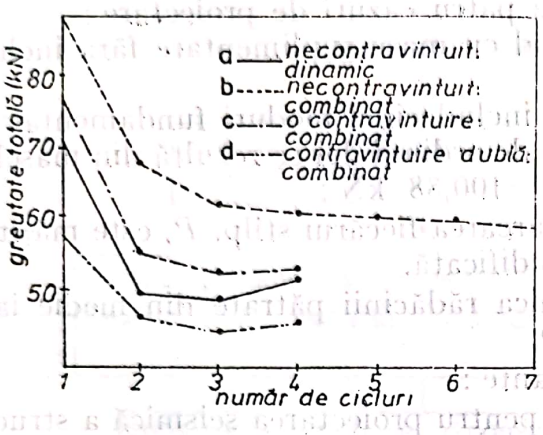


Fig. 4.6

Greutatea optimă a structurii în funcție de numărul de cicluri de proiectare este reprezentată în fig. 4.6.

În fig. 4.6 a se reprezintă proiectarea cadrului care rezultă numai din răspunsul dinamic (încărcarea statică se consideră ca o masă suplimentară în analiza dinamică), în fig. 4.6 b sînt indicate rezultatele proiectării pentru cadrul I în cazul eforturilor unitare combinate, din încărcarea statică și excitația dinamică. (4.6 c) și (4.6 d) reprezintă rezultatele proiectării în cazul cadrului cu un sistem simplu de contravîntuiri (cadrul III) și un sistem dublu de contravîntuiri (cadrul II), pentru răspunsul combinat la încărcare statică și excitație dinamică. Deplasările structurii, corespunzătoare celor patru cazuri sînt arătate în fig. 4.7. Se remarcă faptul că sistemele contravîntuite sînt mai ușoare decît cele necontravîntuite, însă sistemul cu contravîntuiri duble are o greutate mai ușoară și o deplasare mai mică decît sistemul contravîntuit simplu.

Se consideră cadrele I și II numai sub acțiunea excitației dinamice. Încărcarea utilă q se tratează ca o masă suplimentară în calculul dinamic. Condiția de încărcare, restricțiile de eforturi unitare și deplasări sînt aceleași ca în situația precedentă. Rezultatele proiectării optime sînt ilustrate în fig. 4.8 și arată că excitația dinamică nu influențează sistemele contravîntuite atît de mult ca cel necontravîntuit. De aici rezultă concluzia că sistemele contravîntuite se recomandă în regiunile seismice.

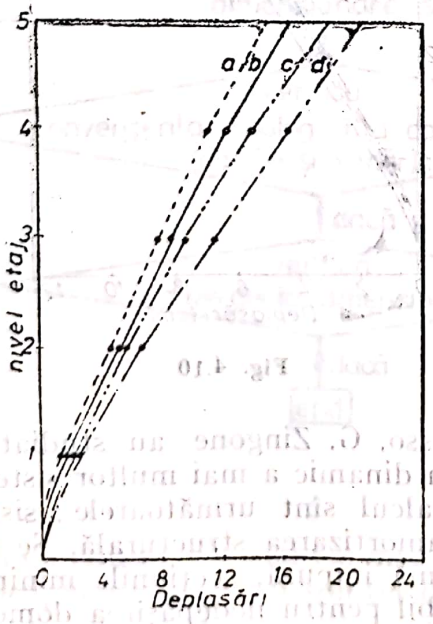


Fig. 4.7

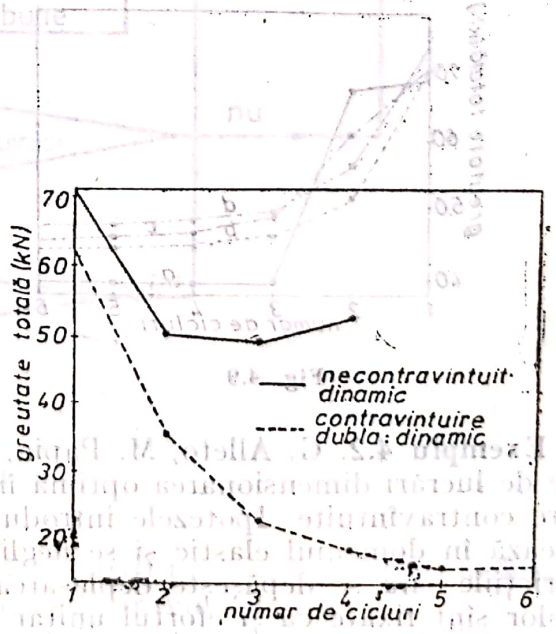


Fig. 4.8

Structura de cadru necontravîntuit I este studiată pentru a determina efectul numărului de moduri naturale și a momentelor de ordinul doi asupra proiectării optime. Proprietățile structurii și restricțiile sînt nemodificate cu excepția faptului că deplasarea maximă este limitată la 12,7 cm. Eforturile unitare sînt determinate pentru spectrul de accelerație seismică mediu cu 5% amortizare și mărime 0,33 g. Sînt examinate patru cazuri de proiectare :

a) răspunsul dinamic pentru primul mod cu mase suplimentare fără includerea efectului $P-\Delta$;

b) același ca a) exceptînd faptul că se includ cinci moduri fundamentale ;

c) același ca b) dar incluzînd momentele de ordinul doi ce rezultă din masele suplimentare distribuite fiecărui stîlp de $P=100{,}88$ kN ;

d) aceleași ca c) exceptînd faptul că încărcarea fiecărui stîlp, P, este mărită cu 403,52 kN, masa suplimentară fiind nemodificată.

Răspunsul dinamic se bazează pe tehnica rădăcinii pătrate din medie iar soluțiile optime sînt reprezentate în fig. 4.9.

Se fac următoarele observații importante :

— modul fundamental nu este adecvat pentru proiectarea seismică a structurilor ; sînt optime primele moduri care pot conduce la rezultate similare ca pentru cinci moduri ;

— includerea efectului $P-\Delta$ cere o proiectare mai dificilă a structurii.

Fig. 4.10 reprezintă deplasările în cazurile analizate. Se observă că numai cazul a) nu respecta restricția de deplasare. Celelalte rezultate optime sînt controlate prin restricția de eforturi unitare.

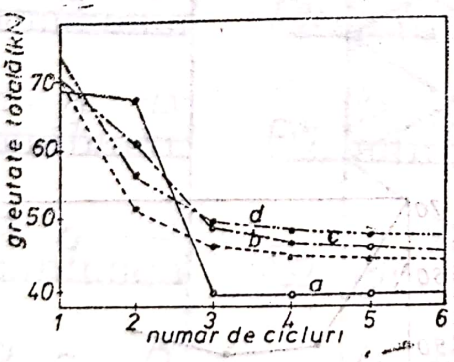


Fig. 4.9

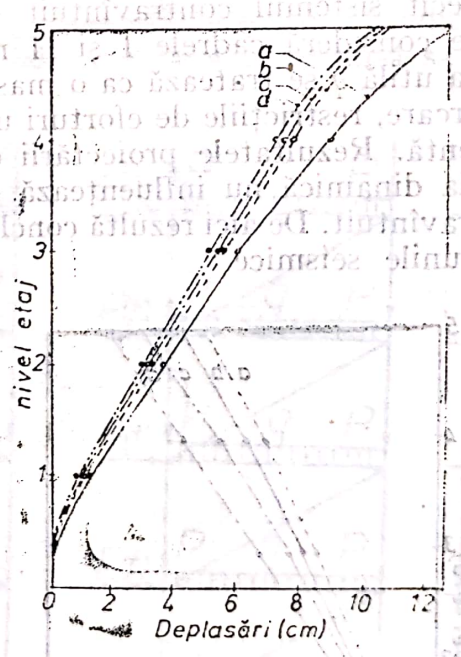


Fig. 4.10

Exemplu 4.2. G. Alleto, M. Papia, G. Russo, G. Zingone au studiat într-o serie de lucrări dimensionarea optimă în regim dinamic a mai multor sisteme de cadre contravîntuite. Ipotezele introduse în calcul sînt următoarele : sistemele lucrează în domeniul elastic și se neglijează amortizarea structurală. Se impun restricțiile : nu se depășește deplasarea maximă impusă, secțiunile minime ale barelor sînt fixate ca și efortul unitar admisibil pentru nedepășirea domeniului elastic și evitarea pericolului de flambaj. Costul este dat de greutatea structurii.

Scanned with OKEN Scanner

Procedeul de calcul iterativ este ilustrat pe schema logică din fig. 4.11.

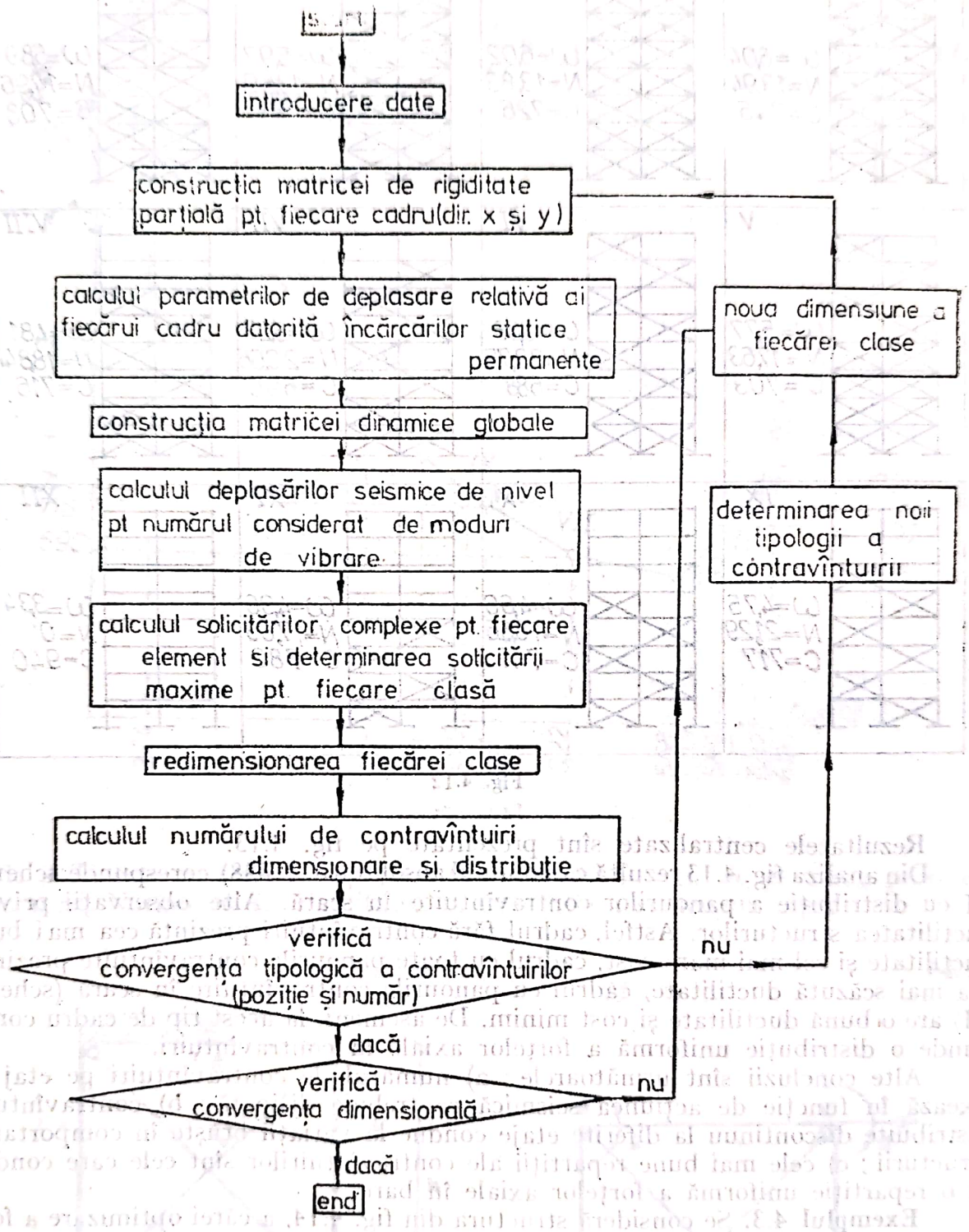


Fig. 4.11

S-au analizat cele mai curente tipuri de repartiții de contravîntuiri utilizate în practică, comparativ cu soluția de cadru necontravîntuit, fig. 4.12.

După cum rezultă din fig. 4.12, pentru fiecare schemă s-a marcat frecvența de oscilație liberă, forța axială maximă în contravîntuiri și costul minim.

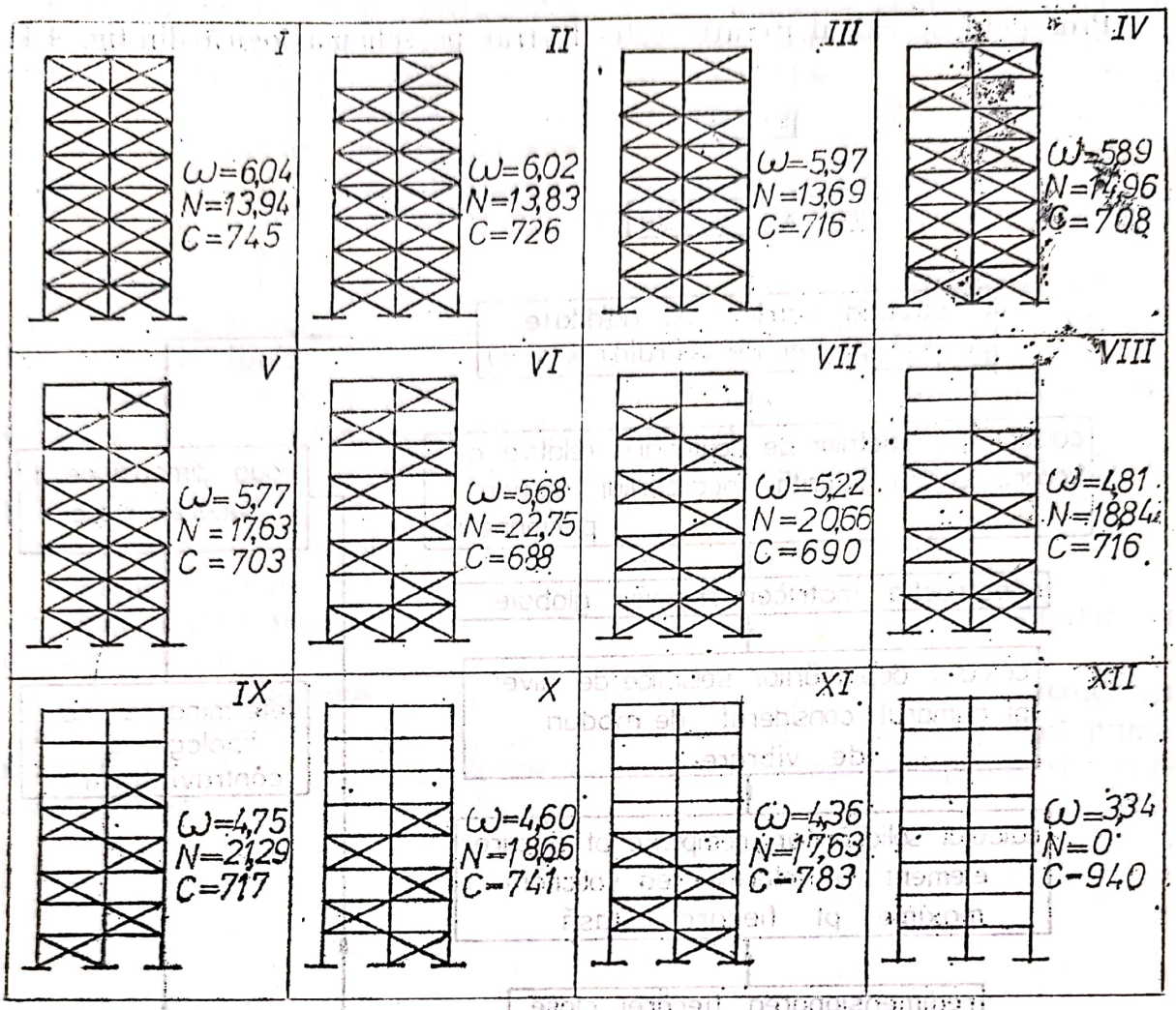


Fig. 4.12

Rezultatele centralizate sînt prezentate pe fig. 4.13.

Din analiza fig. 4.13 rezultă că minimul absolut ($GC=688$) corespunde schemei VI cu distribuție a panourilor contravîntuite în scară. Alte observații privesc ductilitatea structurilor. Astfel, cadrul fără contravînțuiri prezintă cea mai bună ductilitate și cel mai mare cost, cadrul cu toate panourile contravîntuite prezintă cea mai scăzută ductilitate, cadrul cu panourile contravîntuite în scară (schema VI) are o bună ductilitate și cost minim. De asemeni, la acest tip de cadru corespunde o distribuție uniformă a forțelor axiale în contravîntuiri.

Alte concluzii sînt următoarele : a) numărul de contravîntuiri pe etaj se fixează în funcție de acțiunea seismică ce trebuie disipată ; b) contravîntuiri distribuite discontinuu la diferite etaje conduc la variații bruște în comportarea structurii ; c) cele mai bune repartiții ale contravîntuirilor sînt cele care conduc la o repartiție uniformă a forțelor axiale în bare.

Exemplul 4.3. Se consideră structura din fig. 4.14, a cărei optimizare a fost tratată de V.F. Poterașu, G. Barbaro, V. Ruisi.

Funcția obiectiv considerată este următoarea :

$$Z=f(X_1, X_2, \Omega). \tag{4.27}$$

unde X_1, X_2 și Ω sînt respectiv aria secțiunii transversale a stîlpilor, a traverselor și a diagonalelor de contravîntuire. Se notează cu σ_{ie} efortul unitar admisibil elastic. Restricțiile sînt date de :

$$\sigma_{i\,max} \leqslant \sigma_{te} \tag{4.28}$$

Deplasarea maximă a traversei datorită acțiunii seismice este

$$u_{max} = \frac{g}{\omega^2}\beta(T) \tag{4.29}$$

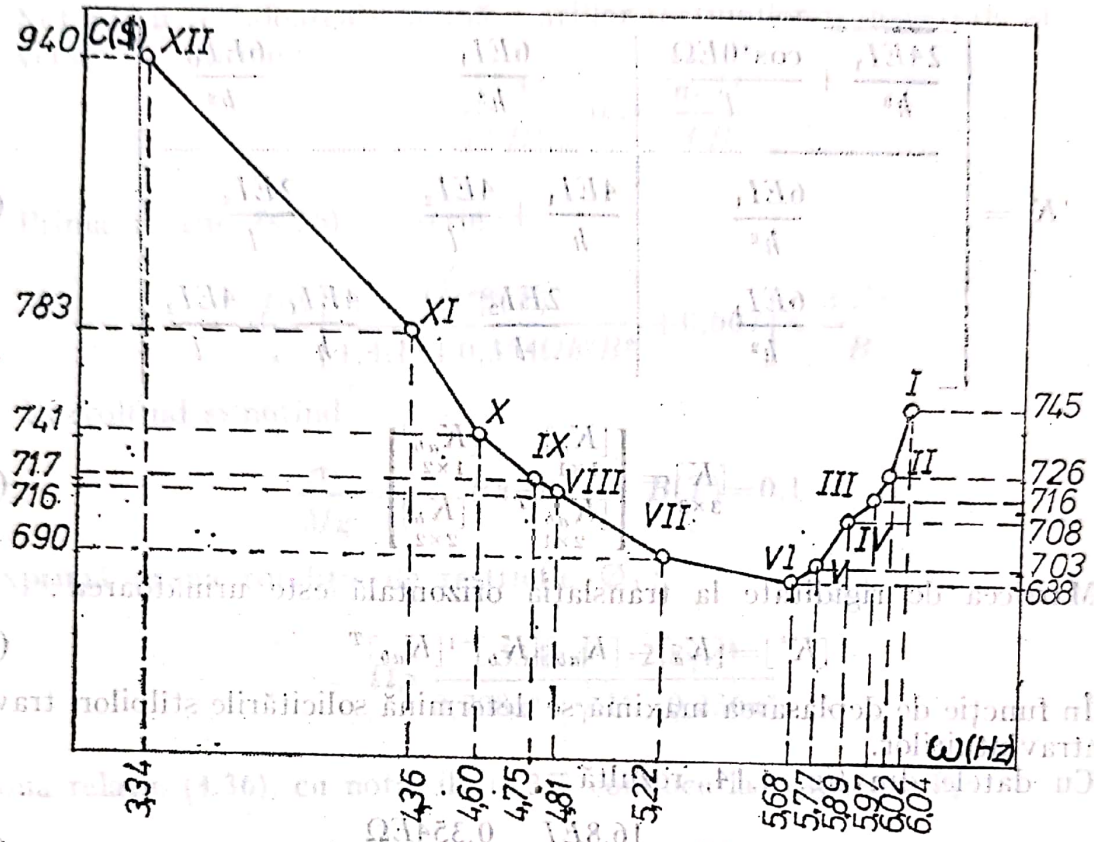


Fig. 4.13

unde $\beta(T)$ este coeficientul spectral (de răspuns) funcție de perioada proprie a structurii. Notînd cu K^* rigiditatea la translație a structurii, avem :

$$F_{ech} = K^* u_{max} \qquad \omega^2 = \frac{K^*}{M} \tag{4.30}$$

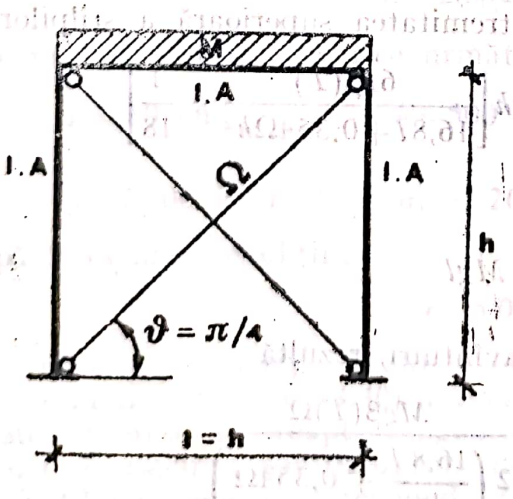


Fig. 4.14

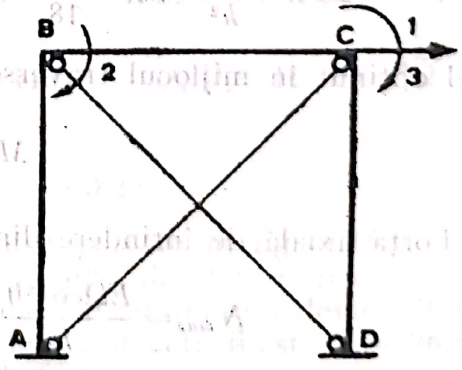


Fig. 4.15

Rigiditatea la translație K^* se deduce din rigiditatea globală a structurii conform fig. 4.15.

Se indică cu indicele 1 deplasarea orizontală a traversei iar cu indicii 2 și 3 rotațiile nodurilor B și C. Se neglijează amortizarea interioară a structurii și deformabilitatea axială a elementelor portante. Matricea globală de rigiditate a structurii are forma :

$$[K]=\left[\begin{array}{c|cc} \dfrac{24EI_1}{h^3}+\dfrac{\cos^3\theta E\Omega}{l} & -\dfrac{6EI_1}{h^2} & -\dfrac{6EI_1}{h^2} \\ \hline -\dfrac{6EI_1}{h^2} & \dfrac{4EI_1}{h}+\dfrac{4EI_2}{l} & \dfrac{2EI_2}{l} \\ -\dfrac{6EI_1}{h^2} & \dfrac{2EI_2}{l} & \dfrac{4EI_1}{h}+\dfrac{4EI_2}{l} \end{array}\right] \tag{4.31}$$

sau

$$\underset{3\times3}{[K]}=\begin{bmatrix} \underset{1\times1}{[K_a]} & \underset{1\times2}{[K_{ab}]} \\ \underset{2\times1}{[K_{ab}]^T} & \underset{2\times2}{[K_b]} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Matricea de rigiditate la translația orizontală este următoarea :

$$[K^*]=[K_a]-[K_{ab}][K_b]^{-1}[K_{ab}]^T \tag{4.33}$$

În funcție de deplasarea maximă se determină solicitările stîlpilor, traversei și contravîntuirilor.

Cu datele din fig. 4.14, rezultă :

$$K^*=\frac{16{,}8EI}{h^3}+\frac{0{,}354E\Omega}{l} \tag{4.34}$$

$$u_{max}=\frac{Mg\beta(T)}{\dfrac{16{,}8EI}{h^3}+\dfrac{0{,}354E\Omega}{l}} \tag{4.35}$$

Momentul încovoietor maxim în extremitatea superioară a stîlpilor este

$$M_s=\frac{6EI}{h^2}u_{max}+\frac{1}{18}Mgl=Mgh\left[\frac{6I\beta(T)}{16{,}8I+0{,}354\Omega h^2}+\frac{1}{18}\right]$$

iar cel obținut în mijlocul traversei

$$M_T=\frac{5}{72}Mgl$$

Forța axială de întindere din contravîntuiri, rezultă

$$N_{max}=\frac{E\Omega\cos^2\theta}{h}u_{max}=\frac{Mg\beta(T)\Omega}{2\left(\dfrac{16{,}8\,I}{h^2}+0{,}354\Omega\right)}$$

Restricțiile se pun sub forma :

$$M_{max} \leqslant M_s = \frac{2\sigma_t I}{H}\ ,\quad N_{max} \leqslant N_s = \sigma_t \Omega \tag{4.36}$$

σ_t — efortul unitar de întindere

Notînd cu A valoarea comună a ariilor secțiunilor transversale ale stîlpilor și traversei, se obține :

$$I = \frac{1}{12}\frac{A^3}{B^2}\ ,\quad M_s = \frac{\sigma_t A^2}{6B}$$

Prima relație (4.36) se scrie :

$$\frac{Mgh}{2}\left[\frac{6A^3\beta(T)}{1{,}4A^3+0{,}354\Omega h^2 B^2}+0{,}667\right] \leqslant \frac{\sigma_t A^2}{B}$$

Dezvoltînd și notînd

$$\frac{\sigma_t}{Mg} = \gamma \qquad Bh = \alpha \qquad B(T) = 0{,}1 \tag{4.37}$$

se exprimă prima condiție de restricție $\varnothing_1$:

$$\Omega \geqslant \frac{1{,}534\alpha A^3 - 2{,}8\gamma A^5}{0{,}708\alpha^2+\gamma A^2-0{,}236\alpha^3} \tag{4.38}$$

A doua relație (4.36), cu notațiile (4.37) conduce la restricția Φ_2 :

$$\Omega \geqslant \frac{0{,}141}{\gamma} - 3{,}955\frac{A^3}{\alpha^2} \tag{4.39}$$

Notînd cu Q_1 costul pe unitatea de greutate a contravîntuirilor și cu Q_2 cel al celorlalte elemente portante, funcția obiectiv se scrie :

$$Z = 2Q_1(\Omega d\rho) + 3Q_2(Ah\rho) \tag{4.40}$$

Se consideră datele numerice următoare :

$B = 10$ cm $\quad h = 500$ cm $\quad M = 6\,400$ kg, $l = h$

$\rho = 7\,500$ kg m^{-3} $\quad \sigma_t = 3\,200$ daN cm^{-2} $\quad Q_1/Q_2 = 10$, $d = h\sqrt{2}$

După înlocuire, se obține

$$\alpha = 5\,000\ ; \qquad \beta = 0{,}2$$

Funcțiile restricție (4.38) și (4.39) sînt reportate în fig. 4.16.

Funcția obiectiv (4.40) reprezintă o familie de drepte paralele. Dintre acestea interesează dreapta tangentă la curba delimitatoare a domeniului admisibil. În consecință, soluția optimă de proiectare a structurii este : $A = 96{,}80$ cm^2, $\Omega = 0{,}562$ cm^2 la care corespunde $Z = 306{,}29\ Q_2 h\gamma$.

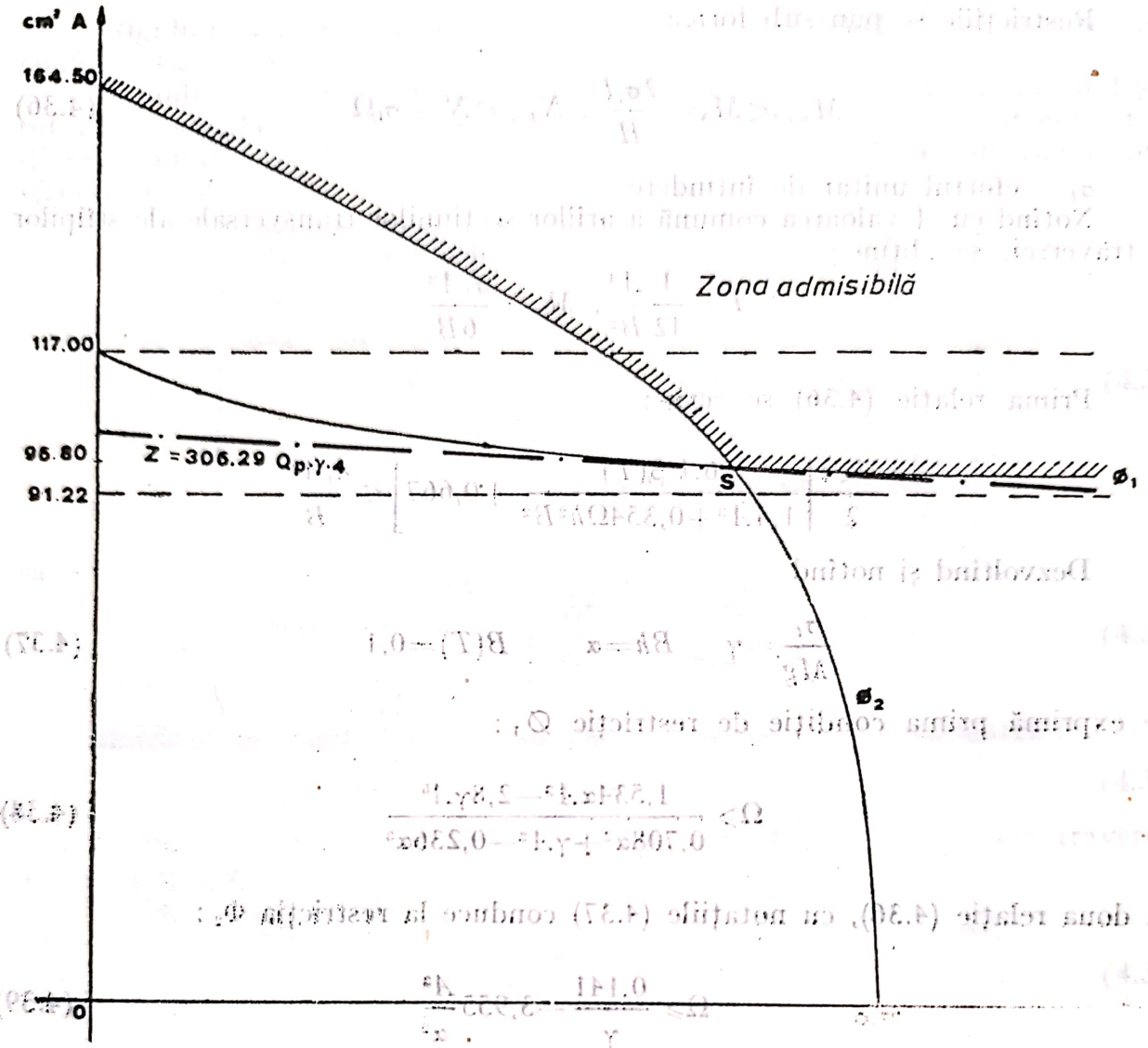


Fig. 4.16

4.1.2. Proiectarea optimă a cadrelor acționate de încărcări dinamice tranzitorii avînd restricții de reliabilitate

Natura nedeterministă a parametrilor de comportare a structurilor a condus la un interes crescînd pentru proiectarea bazată pe reliabilitate.

În acest subcapitol se tratează după J. W.Davidson, L. P. Felton, G. C. Hart problema de proiectare la greutate minimă a cadrelor nedeterminate acționate de încărcări dinamice tranzitorii avînd parametri aleatori. Două metode distincte de analiză sînt utilizate în algoritmul de optimizare : a) integrarea numerică a ecuației de mișcare și b) spectrul de răspuns. Ultima metodă permite aproximarea răspunsului maxim al structurii și oferă importante avantaje în calculale de optimizare. Formularea prezentată permite proiectantului să specifice probabilitatea maximă admisă pentru cedarea sistemului și probabilitățile maxime admise pentru apariția modurilor individuale de cedare. Aceasta se realizează prin considerarea funcțiilor densitate de probabilitate (normale) cu doi parametri pentru toți parametrii aleatori caracterizați prin valorile lor medii și coeficienții de variație.

Pentru o structură cu parametri aleatori, problema de optimizare se formulează în modul următor :

să se minimizeze $$W(\{X\}) \tag{4.41}$$

cu restricțiile $$P_0(\{X\}) \leqslant p_0\,;\; P_i(\{X\}) \equiv P[\beta_i(\{X\}) > B_i(\{X\})] \leqslant p_i \tag{4.42}$$
$$i = 1, 2, \ldots, M$$

unde $\{X\} = (X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_n, \ldots, X_N)$ este un vector de N parametri aleatori în care se consideră că X_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \leqslant N$ sînt variabilele de proiectare ale căror valori trebuie să se determine încît să minimizeze funcția obiectiv $W(\{X\})$ cu restricțiile (4.42), $P_0(\{X\})$ este probabilitatea de cedare a întregului sistem iar p_0 este limita admisibilă pentru această mărime. $\beta_i(\{X\})$ este mărimea i a răspunsului sistemului iar $B_i(\{X\})$ este limita admisă a acestei mărimi. Notația $P[\ldots] \leqslant p_i$ constă în aceia că probabilitatea $P_i(\{X\})$ a mărimii i a răspunsului fiind mai mare decît limita admisibilă trebuie să fie mai mică sau egală cu valoarea specificată (probabilitatea de cedare) p_i.

Dacă se consideră că toți parametrii aleatori au o repartiție normală, atunci valorile lui p_i pot fi legate de măsimile răspunsului prin

$$p_i = 1 - \Phi(q_i) \tag{4.43}$$

unde

$$q_i = |\overline{B}_i(\{X\}) - \overline{\beta}_i(\{X\})| / \sqrt{S^2_{B_i}(\{X\}) + S^2_{\beta_i}(\{X\})} \tag{4.44}$$

iar $\Phi(q_i)$ este repartiția normală standard (cumulativă). În (4.44) $B_i(\{X\})$ și $\beta_i(\{X\})$ sînt mărimile medii, iar $S_{Bi}(\{X\})$ și $S_{\beta i}(\{X\})$ sînt abaterile standard.

Utilizînd (4.44) și adoptînd o limită superioară pentru $P_0(X)$, problema inițială se rescrie în forma :

să se minimeze $$W(\{X\}) = \overline{W}(\{X\}) + q_w S_w(\{X\}) \tag{4.45}$$

supusă la restricțiile $$g_1(\{X\}) = \sum_{i=1}^{M} P_i(\{X\}) - p_0 \leqslant 0 \tag{4.46}$$

$$g_{i+1}(\{X\}) \equiv \overline{\beta}_i(\{X\}) + q_i \sqrt{S^2_{B_i}(\{X\}) + S^2_{\beta_i}(\{X\})} - \overline{B}_i(\{X\}) \leqslant 0 \tag{4.47}$$
$$i = 1, 2, \ldots, M$$

unde $\overline{W}(\{X\})$ indică valoarea medie a funcției obiectiv, $S_w(\{X\})$ este abaterea standard a funcției obiectiv iar q_w este o constantă care este legată funcțional de probabilitatea de depășire a funcției obiectiv $W(\{X\})$. În cele mai multe probleme de optimizare a structurilor este suficient să se minimizeze $W(X)$ cu $q_w = 0$. În acele cazuri unde $q_w > 0$, mărimea $S_w(\{X\})$ se poate ușor evalua cînd W este o funcție liniară de variabilele aleatorii X_j ca în multe tipuri de structuri.

Dacă W nu este o funcție liniară de X_j, $W(\{X\})$ poate fi aproximată prin termenii liniari ai dezvoltării în serie Taylor.

Conform modelului statistic liniar, abaterea standard a mărimii răspunsului ieste dată de relația

$$S_{\beta_i}(\{\underline{X}\}) = \left[\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left. \frac{\partial \beta_i(\{X\})}{\partial X_j} \right|_{\underline{X} = \underline{\overline{X}}} \left. \frac{\partial \beta_i(\{X\})}{\partial X_k} \right|_{\underline{X} = \underline{\overline{X}}} R_{jk} V_j V_k \overline{X}_j \overline{X}_k \right]^{1/2} \tag{4.48}$$

unde V_j este coeficientul de variație ce leagă abaterea standard de mărimea medie a parametrului aleatoriu $\overline{X}_j$, prin $V_j = S_j / \overline{X}_j$ iar R_{jk} este coeficientul de corelație cu valoarea $-1 \leqslant R_{jk} \leqslant 1$. Se face observația că relațiile (4.43), (4.44) și (4.47) utilizează repartiții normale pentru impunerea probabilității de cedare, în timp ce (4.48) este obținută pe baza unor expresii generale aproximative ale primelor

două momente statistice cu repartiție oarecare ; aceste expresii pot fi utilizate în (4.47) sau în relațiile de restricții bazate pe alte funcții de repartiție cu doi parametri.

a) **Metoda spectrului de răspuns**

Răspunsul maxim al unui oscilator cu un singur grad de libertate excitat arbitrar depinde de amortizare și de frecvența proprie a acestuia. Pentru o fracțiune din amortizarea critică ξ_i impusă, relația funcțională între răspunsul maxim și frecvența proprie $\varphi(\nu, \xi_i)$ este denumită spectru de răspuns sau de șoc. Dacă spectrul de șoc este cunoscut, atunci răspunsul maxim al oscilatorului poate fi determinat. Generalizarea la cazul structurilor cu mai multe grade de libertate acționate de încărcări dinamice tranzitorii se realizează prin metoda coordonatelor normale și astfel se poate obține răspunsul maxim. Aceasta abordare este utilă în proiectarea preliminară a structurilor, deoarece în această fază se analizează numeroase variante. În cele ce urmează se vor considera structurile acționate la bază de o accelerație de tip seismic, acest tip de excitație fiind adaptat la tratarea prin spectru de șoc. Considerînd că accelerația bazei are mărimea $\ddot{u}_g(\{X\}, t)$ ecuația de mișcare în coordonate normale este scrisă

$$\ddot{Y}_i(\{X\}, t)+2\xi_i(\{X\})\omega_i(\{X\})\dot{Y}_i(\{X\}, t)+\omega_i^2 Y_i(\{X\}, t)= \\ -c_i(\{X\})\ddot{u}_g(\{X\}, t)_{i=1,2\ldots,N} \tag{4.49}$$

în care

$$\omega_i^2(\{X\})=K_i(\{X\})/M_i(\{X\}) c_i(\{X\})=\{\Phi_i\}^T[m(\{X\})]\{\tilde{I}\}/M_i(\{X\}) \tag{4.50}$$

unde $[\Phi(\{X\})]$ este matricea modală, $\{\tilde{I}\}$ este un vector cu elemente zero și unu care selectează prin elementele nenule deplasările paralele cu direcția accelerației, $c_i(X\})$ este factorul de participare modală — măsura gradului de participare a modului normal i la încărcarea totală a structurii. Considerînd că a fost determinat un spectru de răspuns asociat, $c_i(\{X\})$ este deasemeni utilizat pentru a lega valoarea maximă a lui Y_i de răspunsul maxim al oscilatorului cu un singur grad de libertate. Deplasarea maximă ca funcție de frecvența proprie (spectrul de răspuns) al unui oscilator simplu cu fracțiunea din amortizarea critică ξ_i acționat de o accelerație la bază $\ddot{u}_g(t)$, se notează prin $\varphi(\omega, \xi_i)$. Pentru o frecvență proprie ω_i, răspunsul maxim al oscilatorului este $\varphi(\omega_i, \xi_i)$. Din definiția factorului de participare modală rezultă

$$[\lambda_i(\{X\})]_{max}=c_i(\{X\})\varphi(\omega_i., \xi_i) \tag{4.51}$$

Se observă că această valoare maximă a coordonatei modale este independentă de t. Similar

$$u_i^*(\{X\})=[u_i(\{X\})]_{max}=\Phi_i(\{X\})\ [Y_i(\{X\})]_{max}=\Phi_i(\{X\})c_i(\{X\})\varphi(\omega_i, \xi_i) \tag{4.51}$$

unde $u_i^*(\{X\})$ se poate considera componenta modală a sistemului de deplasări.

În abordarea spectrală, cele mai satisfăcătoare mărimi ale componentelor vectorului deplasărilor maxime totale, $\{U\}$, se obțin în mod obișnuit din rădăcina pătrată a sumei pătratelor componentelor $u_i^*(\{X\})$

$$U_i(\{u_k^*\})=\left[\sum_{k=1}^{N}(u_{ik}^*)^2\right]^{1/2},\quad i=1, 2\ldots, N \tag{4.52}$$

unde $(\{u_k^*\})^T=\{u_{1k}^* u_{2k}^* \ldots u_{ik}^* \ldots u_{Nk}^*\}$. Se observă că pentru structuri mari, componentele deplasărilor maxime se pot estima efectuînd sumarea în relația precedentă după $\tilde{N}<N$.

Scanned with OKEN Scanner

două momente statistice cu repartiție oarecare ; aceste expresii pot fi utilizate în (4.47) sau în relațiile de restricții bazate pe alte funcții de repartiție cu doi parametri.

a) **Metoda spectrului de răspuns**

Răspunsul maxim al unui oscilator cu un singur grad de libertate excitat arbitrar depinde de amortizare și de frecvența proprie a acestuia. Pentru o fracțiune din amortizarea critică ξ_i impusă, relația funcțională între răspunsul maxim și frecvența proprie $\varphi(\nu, \xi_i)$ este denumită spectru de răspuns sau de șoc. Dacă spectrul de șoc este cunoscut, atunci răspunsul maxim al oscilatorului poate fi determinat. Generalizarea la cazul structurilor cu mai multe grade de libertate acționate de încărcări dinamice tranzitorii se realizează prin metoda coordonatelor normale și astfel se poate obține răspunsul maxim. Aceasta abordare este utilă în proiectarea preliminară a structurilor, deoarece în această fază se analizează numeroase variante. În cele ce urmează se vor considera structurile acționate la bază de o accelerație de tip seismic, acest tip de excitație fiind adaptat la tratarea prin spectru de șoc. Considerînd că accelerația bazei are mărimea $\ddot{u}_g(\{X\}, t)$ ecuația de mișcare în coordonate normale este scrisă

$$\ddot{Y}_i(\{X\}, t)+2\xi_i(\{X\})\omega_i(\{X\})\dot{Y}_i(\{X\}, t)+\omega_i^2 Y_i(\{X\}, t)= \\ -c_i(\{X\})\ddot{u}_g(\{X\}, t) \qquad i=1,2\ldots, N \tag{4.49}$$

în care

$$\omega_i^2(\{X\})=K_i(\{X\})/M_i(\{X\}) c_i(\{X\})=\{\Phi_i\}^T[m(\{X\})]\{\tilde{I}\}/M_i(\{X\}) \tag{4.50}$$

unde $[\Phi(\{X\})]$ este matricea modală, $\{\tilde{I}\}$ este un vector cu elemente zero și unu care selectează prin elementele nenule deplasările paralele cu direcția accelerației, $c_i(X\})$ este factorul de participare modală — măsura gradului de participare a modului normal i la încărcarea totală a structurii. Considerînd că a fost determinat un spectru de răspuns asociat, $c_i(\{X\})$ este deasemeni utilizat pentru a lega valoarea maximă a lui Y_i de răspunsul maxim al oscilatorului cu un singur grad de libertate. Deplasarea maximă ca funcție de frecvența proprie (spectrul de răspuns) al unui oscilator simplu cu fracțiunea din amortizarea critică ξ_i acționat de o accelerație la bază $\ddot{u}_g(t)$, se notează prin $\varphi(\omega, \xi_i)$. Pentru o frecvență proprie ω_i, răspunsul maxim al oscilatorului este $\varphi(\omega_i, \xi_i)$. Din definiția factorului de participare modală rezultă

$$[\lambda_i(\{X\})]_{max}=c_i(\{X\})\varphi(\omega_i., \xi_i) \tag{4.51}$$

Se observă că această valoare maximă a coordonatei modale este independentă de t. Similar

$$u_i^*(\{X\})=[u_i(\{X\})]_{max}=\Phi_i(\{X\})\ [Y_i(\{X\})]_{max}=\Phi_i(\{X\})c_i(\{X\})\varphi(\omega_i, \xi_i) \tag{4.51}$$

unde $u_i^*(\{X\})$ se poate considera componenta modală a sistemului de deplasări.

În abordarea spectrală, cele mai satisfăcătoare mărimi ale componentelor vectorului deplasărilor maxime totale, $\{U\}$, se obțin în mod obișnuit din rădăcina pătrată a sumei pătratelor componentelor $u_i^*(\{X\})$

$$U_i(\{u_k^*\})=\left[\sum_{k=1}^{N}(u_{ik}^*)^2\right]^{1/2}, \quad i=1, 2\ldots, N \tag{4.52}$$

unde $(\{u_k^*\})^T=\{u_{1k}^* u_{2k}^* \ldots u_{ik}^* \ldots u_{Nk}^*\}$. Se observă că pentru structuri mari, componentele deplasărilor maxime se pot estima efectuînd sumarea în relația precedentă după $\tilde{N}<N$.

Scanned with OKEN Scanner

Componentele maxime ale eforturilor unitare se obțin pe o cale analogă, în forma

$$\sigma_i(\{u_k^*\}) = \left[\sum_{k=1}^{N} (\sigma_{ik}^*)^2\right]^{1/2}, \quad i=1, 2, .., N \tag{4.53}$$

unde

$$\{\sigma_k^*(\{X\})\} = [Q(\{X\})]\ \{u_k^*(\{X\})\} \tag{4.54}$$

în care $[Q(\{X\})]$ este matricea proprietăților materialului și a elementelor geometrice.

Abaterea standard a lui U_i din (4.52) are forma

$$S_{U_i}(X) = \left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{u}_{ik}^* \bar{u}_{im}^*}{U_i^2(\bar{u}_k^*)}\, cov\,(u_k^i, u_{im}^*)\right]^{1/2} \tag{4.55}$$

unde $\bar{u}_{ik}^* \equiv u_{ik}^*(X)$ iar cov (u_{ik}^*, u_{im}^*) este covarianța între u_{ik}^* și u_{im}^*.

Similar

$$S_{\sigma_i}(\{X\}) = \left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \frac{\bar{\sigma}_{ik}^* \bar{\sigma}_{im}^*}{\sigma_i^2(\bar{u}_k^*)}\, cov(\sigma_{ik}^*, \sigma_{im}^*)\right]^{1/2} \tag{4.56}$$

b) **Procedeul de optimizare**

Metoda de optimizare utilizată este cea a funcției de penalitate modificate extinse, o tehnică de optimizare fără restricții. Astfel se introduce funcția

$$F(\{X\}), \alpha) = W(\{X\}) - \alpha \sum_{i=1}^{M} G_i(\{X\}) \tag{4.57}$$

unde

$$G_i(\{X\}) = \begin{cases} 1/g_i(\{X\}) & \text{pentru } g_i(\{X\}) \leqslant \varepsilon \\ [2\varepsilon - g_i(\{X\})]/\varepsilon^2 & \text{pentru } g_i(\{X\}) > \varepsilon \end{cases} \tag{4.58}$$

în care $\varepsilon = -\sqrt{\alpha}/\delta$ fiind o constantă specificată iar α un factor de amplificare a restricției.

Pentru optimizarea sistemului dinamic în care unele restricții depind de timp, (4,58) se scrie

$$F(\{X), \alpha) = W(\{X\}) - \alpha\left[\sum_j G_j(\{X\}) + \sum_k \int G_k(\{X\}, t)dt\right] \tag{4.59}$$

unde j este numărul de restricții care sînt independente de timp iar k numărul celor care sînt funcții de timp. Considerînd că restricțiile sînt evaluate în N intervale de timp, (4.59) devine

$$F(\{X\}, \alpha) = W(\{X\}) - \alpha\left[\sum_j G_j(\{X\}) + \sum_k \sum_{n=1}^{N} G_{k, t_0+n\Delta t}(\{X\})\right. \tag{4.60}$$

Problema de optimizare fără restricții a fost rezolvată prin metoda Powell care a fost aleasă deoarece ea depinde numai de valorile funcției de penalitate și nu de gradienții funcției. Algoritmul Powell evită astfel derivatele ecuațiilor de restricție și deci și pe cele ale derivatelor de ordinul doi ale mărimilor răspunsului. Ecuațiile de mișcare au fost integrate numeric.

Exemplul 4.4. Se consideră proiectarea la greutate minimă a cadrului cu o deschidere și două etaje din fig. 4.17 acționat la baza de accelerația $\ddot{u}_g(t) = 900 \sin 30t$; $0 \leqslant t \leqslant \pi/30$; $\xi_i = 0{,}05$. Spectrul de șoc al accelerației bazei este prezentat în fig. 4.18.

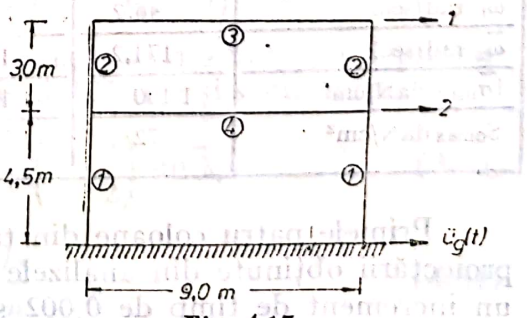


Fig. 4.17

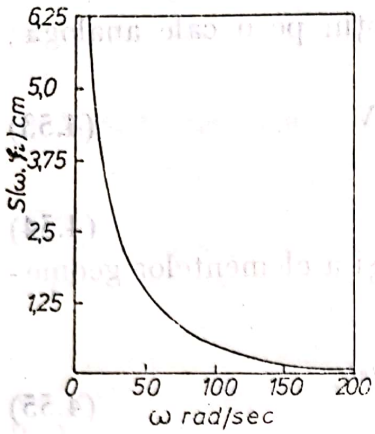


Fig. 4.18

Variabilele de proiectare sînt momentele de inerție I_i ale elementelor.

Aceste variabile, împreună cu modulul de elasticitate longitudinal E, amplitudinea excitației $\ddot{u}_g$ și eforturile unitare de întindere și compresiune $\sigma_t = \sigma_c$ sînt parametri aleatori necorelați. Valorile numerice sînt următoarele: $E = 2{,}1 \times 10^6$ daN/cm²; $\bar{\sigma}_t = |\bar{\sigma}_c| = 1\,400$ daN/cm²; densitatea 8 gr/cm³; fracțiunea din amortizarea critică este de 5% în fiecare mod, abaterea standard a eforturilor unitare admisibile 52,5 daN/cm²; coeficienții de variație pentru E_i și I_i sînt respectiv 0,015 și 0,05. Toți coeficienții de corelație sînt considerați nuli.

Greutatea proprie și încărcarea adițională de 180 daN/m pe grinzi se consideră concentrate în nodurile 1 și 2, reducînd astfel analiza dinamică la cea a unui sistem discret cu două grade de libertate. Restricțiile sînt impuse asupra deplasărilor admisibile ale nodurilor 1 și 2 (2,5 cm și respectiv 4 cm) asupra eforturilor unitare din încovoiere din extremitățile fiecărei grinzi și a fiecărui stîlp, a momentului de inerție minim al fiecărui element 2 080 cm⁴ și a probabilității globale de cedare (0,001). În exemplul prezentat nu se impune nici o restricție asupra probabilităților de apariție a modurilor individuale de cedare, $q_i = 0$ în (4.47).

Toate rezultatele proiectării sînt prezentate în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

	Analiza utilizînd ecuațiile de mișcare				Analiza utilizînd spectrul de șoc	
	Excitație aleatorie		Excitație deterministă		Excitație deterministă	
	1 a	1 b	2 a	2 b	3 a	3 b
$\bar{W}$ kg	2 308	2 486	2 232	2 382	2 254	2 390
$P \times 10^3$	0,999	0,999	0,998	0,998	0,892	1,000
$\bar{I}_1$ cm⁴	169 518	164 981	158 863	121 155	155 825	95 642
$\bar{I}_2$ cm⁴	19 228	20 560	17 938	18 520	20 726	20 768
$\bar{I}_3$ cm⁴	18 853	16 897	17 522	16 315	18 770	17 147
$\bar{I}_4$ cm⁴	2 705	13 318	2 539	22 350	2 539	33 130
$\bar{u}_{1\max}$ cm	2,17	2,06	2,28	2,27	2,29	2,31
$\bar{u}_{2\max}$ cm	0,93	0,87	0,97	0,99	0,98	1,05
$\bar{\omega}_1$ rad/sec.	46,2	47,7	44,9	45,3	45,0	45,1
$\bar{\omega}_2$ rad/sec.	171,2	167,5	166,5	155,4	172,1	153,4
$\lvert\bar{\sigma}_{\max}\rvert$ daN/cm²	1 100	1 123	1 158	1 176	1 170	1 195
$S_{\sigma\max}$ daN/cm²	72	67	37	39	28	31

Primele patru coloane din tabel (cazurile 1a, 1b, 2a, 2b) conțin rezultatele proiectării obținute din analizele bazate pe integrarea ecuațiilor de mișcare, cu un increment de timp de 0,002 sec. pe un interval de 0,1 sec.

Rezultatele cazurilor 3a și 3b sînt obținute în urma calculului numeric efectuat pe baza spectrului răspuns al deplasării din fig. 4.18. Cazurile 1a și 1b presupun un coeficient de variație a amplitudinii de excitație $\ddot{u}_g$ de 0,05.

Soluțiile 1a, 2a și 3a reprezintă proiectarea la greutatea minimă obținută prin metoda prezentată, în timp ce 1b, 2b, 3b sînt soluțiile locale de greutate minimă la care algoritmul de optimizare converge deasemeni, ele depinzînd de punctul inițial de plecare al calculului. Soluțiile cu greutatea cea mai joasă au fost obținute pentru valori inițiale I_1 mari și I_4 mici. Cum au remarcat J. H. Cassis și L.A. Schmit Jr. convergența la minimele locale poate fi consecința faptului că spațiul de proiectare este disjunct.

Se poate remarca din tabel că toate soluțiile au restricții active pentru probabilitatea de cedare prescrisă a sistemului (0,001) și lucru mult mai important, că metoda spectrului de șoc conduce la soluții care sînt în vecinătatea celor obținute prin integrarea directă a ecuațiilor de mișcare.

Considerînd faptul că timpul de calcul asociat analizei spectrale este de aproximativ 1/5 la 1/4 din cel al integrării numerice directe (pentru un interval de 0,1 sec.) apare că metoda spectrului de răspuns are un potențial considerabil în optimizarea structurilor acționate dinamic tranzitoriu. Cum este indicat în tabel, amplitudinea excitației aleatorii cu un coeficient de variație de 0,05 suplimentează greutatea structurii cu aproximativ 3—4%. Integrarea numerică arată că deplasările și eforturile unitare maxime apar la approximativ 0,085 sec.

4.2 Extincția în timp minim a vibrațiilor unei structuri spațiale în dublu strat

Se consideră structura spațială din fig. 4.19 ce are cadre rigide de capăt și mase concentrate egale cu ρ la fiecare nod. D. Dean care a tratat modelul a considerat că se neglijează scurtarea și încovoierea elementelor verticale. Problema tratată de V. F. Poteraşu face parte din categoria problemelor inverse ale structurilor, adică determină modul de variație al acțiunii exterioare pentru care are loc extincția oscilațiilor.

Ecuația vibrațiilor forțate neamortizate ale structurii spațiale este următoarea

$$[\rho D_t^2 - K\delta_r - \overline{K}\delta_s]w(r,s,t) = P(r,s,t)$$
$$\delta f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) \tag{4.61}$$

cu condițiile de contur

$$w(r, {}^{o}_{n}, t) = \nabla_r w(o,s,t) = \Delta_r w(m,s,t) = 0$$
$$(\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1)) \tag{4.62}$$

Soluția ecuației (4.61) se poate căuta sub forma unei dezvoltări a deplasării verticale w și a excitației exterioare P într-o serie dublă în r și s sub forma

$$\begin{bmatrix} P(r,s,t) \\ w(r,s,t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{n-1} \begin{bmatrix} P_{kl}(t) \\ w_{kl}(t) \end{bmatrix} \cos \lambda_k \left(r + \frac{1}{2}\right) \sin \overline{\lambda}_l s \tag{4.63}$$

unde

$$\lambda_k = \frac{K\pi}{m+1}, \quad \lambda_l = \frac{l\pi}{n} \tag{4.64}$$

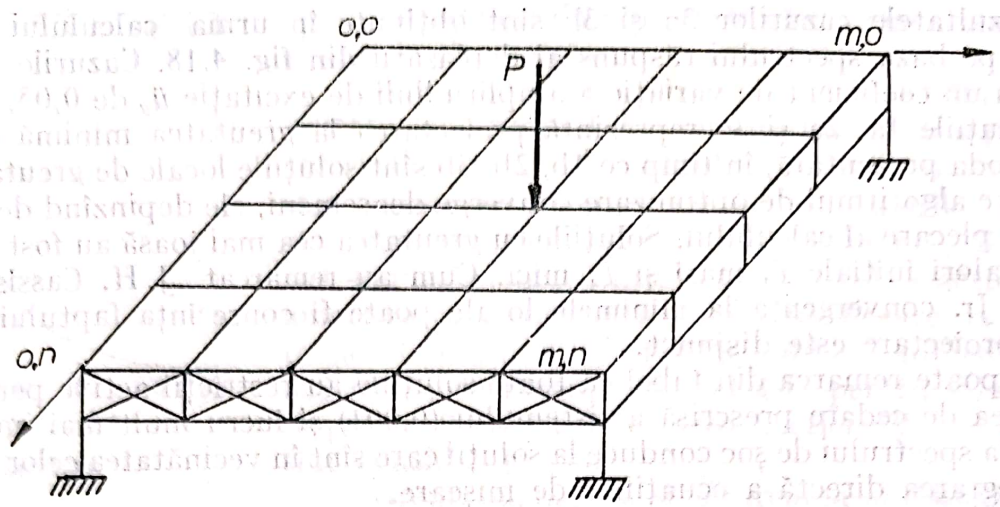


Fig. 4,19

Înlocuind (4.64) în (4.61) și echivalînd coeficienții ambilor membri, rezultă

$$(D_t^2+\beta_{kl}^2)w_{1l}(t)=\frac{1}{\rho}P_{1l}(t)\,;\quad \beta_{kl}^2=\frac{2}{\rho}(K\gamma_k+\overline{K}\gamma_l) \tag{4.65}$$

cu

$$\gamma_l=1-\cos\lambda_k\,;\quad \overline{\gamma}_l=1-\cos\overline{\lambda}_l \tag{4.66}$$

Forța exterioară ce acționează în noduri se consideră parametru de control. Astfel, variind $P(r, s, t)$ se poate obține extincția oscilațiilor structurii într-un timp minim.

Fie $P(r, s, t)=P(t)\delta(r-\alpha_P)\delta(s-\beta_P)$ unde δ este funcția delta a lui Dirac iar α_P și β_P coordonatele punctului de aplicație a lui $P(t)$. Este necesar să se determine acțiunea de control $P(t)$ care într-un timp minim posibil, T, elimină vibrațiile structurii spațiale a cărei comportare este dată de ecuația (4.61) ce are condiții inițiale și de contur cunoscute.

Energia totală produsă de acțiunea de control și consumată pentru extincția oscilațiilor este mărginită de valoarea l :

$$\int_0^T P^2(t)\,dt\leqslant l^2 \tag{4.67}$$

Condițiile de absență ale vibrațiilor la momentul $t=T$ sînt :

$$\begin{cases} w(r, s, t)=w_0(r, s, T)+w_1(r, s, T)=0 \\ \dot{w}(r, s, t)=\dot{w}_0(r, s, T)+\dot{w}_1(r, s, T)=0 \end{cases} \tag{4.68}$$

Dacă structura , inițial în repaus, este acționată brusc de forța $P=P_0\delta(r-\alpha_P)\,\delta(s-\beta_P)$ soluția ecuației (4.61) este

$$w_0=\frac{4P_0}{\rho mn}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{\beta_{kl}^2}\cos\lambda_k\left(r+\frac{1}{2}\right)\sin\overline{\lambda}_l s\cos\lambda_k\left(\alpha_p+\frac{1}{2}\right)\sin\overline{\lambda}_l\beta_P\cos\beta_{kl}t \tag{4.69}$$

În cazul acționării structurii cu o forță arbitrară $F(t)$, soluția are forma

$$w_1=\frac{4}{mn\rho}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{\beta_{kl}}\cos\lambda_k\left(r+\frac{1}{2}\right)\sin\overline{\lambda}_l s\cos\lambda_k\left(\alpha_P+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\Big)\sin\bar{\lambda}_l\beta_F\int_0^T F(\tau)\sin\beta_{ll}(t-\tau)\,d\tau \tag{4.70}$$

Dacă se substituie (4.69) și (4.70) în (4.68) și se compară ambii membri ai relațiilor obținute, rezultă :

$$\begin{cases} -\dfrac{P_0}{\beta_{ll}}\gamma_{kl}\cos\beta_{ll}T=\displaystyle\int_0^T F(t)\sin\beta_{ll}(T-t)\,dt \\ \dfrac{P_0}{\beta_{ll}}\gamma_{kl}\sin\beta_{ll}T=\displaystyle\int_0^T F(t)\cos\beta_{ll}(T-t)\,dt \end{cases} \qquad \gamma_{le}=\frac{\cos\lambda_l\left(\alpha_p+\dfrac{1}{2}\right)\sin\bar{\lambda}_l\beta_l}{\cos\lambda_l\left(\alpha_F+\dfrac{1}{2}\right)\sin\bar{\lambda}_l\beta_F} \tag{4.71}$$

Se introduc notațiile

$$a=\cos\beta_{ll}T\,;\quad b=\sin\beta_{ll}T\,;\quad c=\frac{P_0}{\beta_{ll}}\gamma_{ll}\,;$$

$$x_1=\int_0^T F(t)\cos\beta_{ll}t\,dt\,;\quad x_2=\int_0^T F(t)\sin\beta_{ll}t\,dt$$

Cu acestea, relațiile (4.71) iau forma

$$-ac=bx_1-ax_2,\quad ac=ax_1+bx_2 \tag{4.72}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații precedent, cu valorile lui x_1 și x_2 (4.71) ia forma echivalentă

$$\int_0^T F(t)\cos\beta_{ll}t\,dt=0,\qquad \int_0^T F(t)\sin\beta_{ll}t\,dt=\frac{P_0}{\beta_{ll}}\gamma_{ll} \tag{4.73}$$

unde mărimea necunoscută T apare numai la limita superioară a integralei.

Acum, trebuie determinată acțiunea $F(t)$ care satisface restricția (4.67) cu condițiile (4.73) la T minim.

Conform metodei momentelor din teoria controlului optimal pentru rezolvarea problemei formulate se consideră problema auxiliară :

Să se determine :

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_i} J=\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{i}\xi_k g'_k(t)\right|^2 dt \tag{4.74}$$

cu condiția

$$\sum_{k=1}^{i}\xi_k\alpha'_k=1 \tag{4.75}$$

Aici α'_k și $g'_k(t)$ sînt respectiv coeficienții funcției $F(t)$ din membrul stîng al ecuațiilor (4.73) ; în acest caz timpul T se determină din ecuația

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_i} J=l^{-2} \tag{4.76}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar acțiunea dete control din relația

$$F(t)=l^2\left|\sum_{k=1}^{i}\xi_k g_k'(t)\right|\operatorname{sign}\sum_{k=1}^{i}\xi_k g_k'(t) \tag{4.77}$$

Reținînd un număr finit de termeni în relațiile (4.73) se poate stinge orice combinație de forme de oscilații.

Vibrațiile periculoase ce au forma kl se vor stinge în timpul minim T.

Problema auxiliară se poate scrie astfel :

$$\min_{\xi_1,\,\xi_2} J=\int_0^T|\,\xi_1\cos\beta_{kl}t+\xi_2\sin\beta_{kl}t\,|^2\,dt \tag{4.78}$$

cu condiția

$$\xi_2\frac{P_0}{\beta_{kl}}\gamma_{kl}=1 \tag{4.79}$$

Condiția de staționaritate a funcționalei (4.78) ținînd cont de (4.79) se determină cu $dJ/d\xi_1=0$ și este următoarea

$$\xi_1=-\frac{\beta_{kl}(1-\cos\delta)}{P_0\gamma_{kl}(\delta+\sin\delta)};\quad \delta=2\beta_{kl}T \tag{4.80}$$

Din relația (4.76) se obține ecuația

$$\frac{2\cos\delta-2+\delta^2}{4(\delta+\sin\delta)}=\frac{P_0^2\gamma_{kl}^2}{\beta_{kl}l^2}=\text{const.} \tag{4.81}$$

a cărei rădăcină este timpul necunoscut, T.

Coeficientul γ_{kl} marchează situația reciprocă între P_0 și acțiunea de control $F(t)$ care se calculează cu relația

$$F(t)=\frac{l^2\beta_{kl}}{P_0\gamma_{kl}}\left(-\frac{1-\cos\delta}{\delta+\sin\delta}\cos\beta_{kl}t+\sin\beta_{kl}t\right) \tag{4.82}$$

În acest mod se obține controlul optimal al procesului de vibrație care se stinge în timpul minim T pentru o formă k_l în timp ce energia consumată de acțiunea exterioară este mărginită.

B. OPTIMIZAREA GRINZILOR CU INIMA PLINĂ DIN BETON PRECOMPRIMAT

CAPITOLUL 5

5.1 Principii de calcul și alcătuire optimă a elementelor încovoiate din beton precomprimat

5.1.1. Relații între criteriile de optimizare

Dimensionarea optimă a elementelor încovoiate utilizînd diverse criterii de optimizare are la bază considerentul, că din mulțimea profilelor transversale și longitudinale ce se pot obține variind proporția materialului pe secțiune, optim este acela, care pentru un anumit consum de material, prezintă fie costul ; greutatea sau volumul minim, fie rezistența sau rigiditatea maximă, îndeplinind în același timp toate cerințele ce decurg din realizarea și exploatarea elementelor în condiții de deplină siguranță.

Formularea matematică a unei astfel de probleme conduce în cazul general la un model neliniar.

Pentru structuri din beton armat și precomprimat, cînd se iau în considerare un număr limitat de parametri, se ajunge la un sistem de relații ce se poate rezolva cu ajutorul programării dinamice.

Dacă se ține cont de toți parametrii, soluția se poate obține prin simulare.

Optimizarea operațiilor de dimensionare pe criteriul costului minim devine posibilă în practică dacă se ține cont numai de factorii esențiali, ce se referă de regulă la consumul de materiale și la operațiile de prelucrare.

Evidențierea influenței unor factori secundari, care condiționează execuția și exploatarea elementelor, complică în mod deosebit calculul, iar ponderea lor în definirea soluției optime nu justifică efortul suplimentar întreprins.

Stabilirea soluției optime prin minimizarea *funcției de greutate (sau de volum)* comportă introducerea unor restricții privind rezistența și rigiditatea elementului.

Atît timp cît aceste condiționări sînt luate în considerație separat și fără să se limiteze consumul de material, ele nu intră în contradicție.

Urmărind satisfacerea condiției de rezistență sau de rigiditate se găsesc două soluții optime, care corespund unor consumuri minime diferite.

Dacă se introduc limitări în privința cantității de material, cerîndu-se de pildă să se afle grinda de greutate minimă pentru care sînt îndeplinite simultan condițiile de rezistență și cele de rigiditate, acestea se vor găsi în opoziție, deoarece nu este posibil să se realizeze cu aceeași cantitate de material un element cu modulul de rezistența și momentul de inerție maxim.

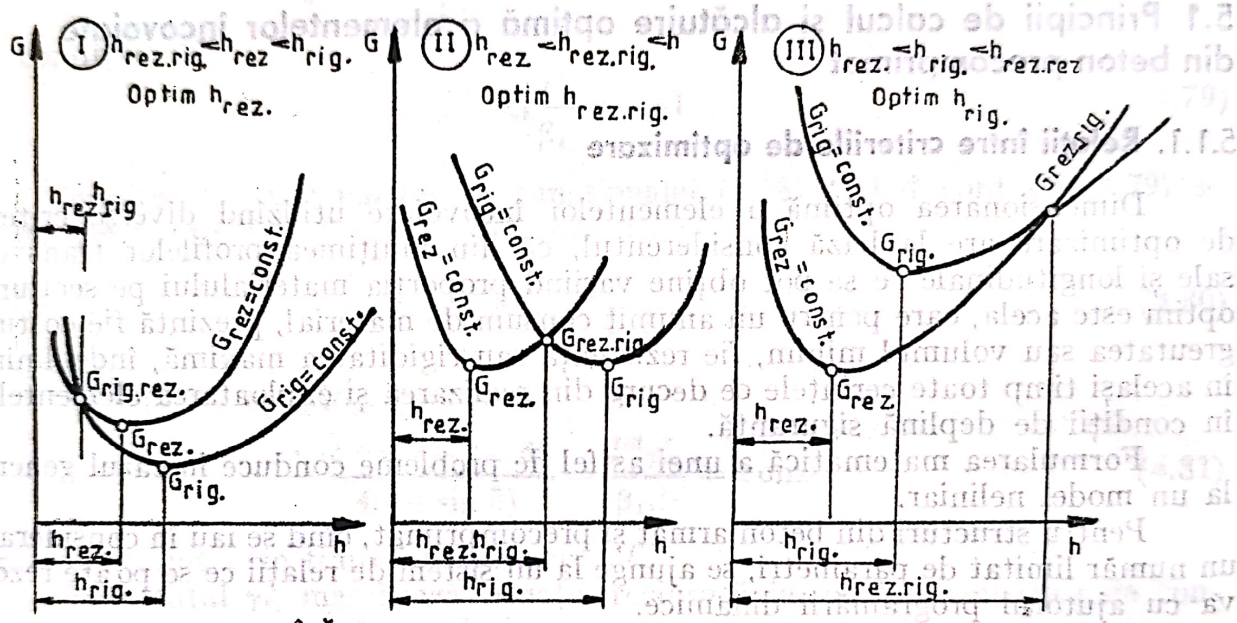
Pentru ca cele două condiții să fie îndeplinite simultan consumul de material trebuie sporit față de valorile minime obținute atunci cînd se ține seama separat de fiecare restricție.

Scanned with OKEN Scanner

Este util să se cunoască în prealabil dacă există situații (și în caz afirmativ cum pot fi ele identificate), cînd respectarea unei singure condiții oferă certitudinea siguranței depline, adică sînt satisfăcute implicit și cerințele celuilalt gen de restricții.

Precizări în acest sens se pot face studiind modul de variație a funcției de greutate în raport cu înălțimea secțiunii (*fig. 5.1.*).

Punctul de intersecție a curbelor de variație a greutății, cînd este respectată condiția de rezistență (G_{rez}) și cînd este satisfăcută condiția de rigiditate (G_{rig}) evidențiază existența a trei situații principial deosebite, care permit stabilirea înălțimii grinzii ținînd cont de existența celor două condiții. Ele sînt formulate concis în tabelul 5.1.



STABILIREA ÎNĂLȚIMII OPTIME PRIN ANALIZA CURBELOR G = f(h)

Fig. 5.1

În varianta I, grinda optimă proiectată din condiția de rezistență satisface și din punct de vedere al rigidității, înălțimea optimă fiind aceea care asigură minimum de greutate din condiția de rezistență (h_{rez}).

În varianta II, grinda cu volumul minim posibil satisface concomitent cele două condiții, înălțimea optimă fiind $h_{rez.rig}$.

Tabelul 5.1

Criterii de determinare a înălțimii optime

Varianta de proiectare	Criteriul de stabilire a înălțimii	Înălțimea grinzii pentru a obține greutatea minimă	Satisfacerea condițiilor date	
			de rezistență	de rigiditate
I	$h_{rez,rig} < h_{rez} < h_{rig}$	h_{rez}	$= \lvert\sigma\rvert$	$< \left[\frac{f}{l}\right]$
II	$h_{rez} < h_{rez,rig} < h_{rig}$	$h_{rez,rig}$	$= \lvert\sigma\rvert$	$= \left[\frac{f}{l}\right]$
III	$h_{rez} < h_{rig} < h_{rez,rig}$	h_{rig}	$< \lvert\sigma\rvert$	$= \left[\frac{f}{l}\right]$

În varianta III, grinda optimă proiectată din condiția de rigiditate, corespunde și din punct de vedere al rezistenței, înălțimea optimă fiind aceea care conduce la greutatea minimă, astfel încît să fie asigurată rigiditatea necesară (h_{rig}). Acest ultim caz se caracterizează prin faptul că înălțimea optimă a grinzii este mai mică decît cea care permite folosirea integrală a capacității de rezistență și deformație ($h_{rig} < h_{rez} < h_{rez,rig}$), fapt ce face ca eforturile unitare efective să fie mai mici decît cele admisibile.

În situația de față forma geometrică a structurii, materialul folosit și condițiile tehnice de exploatare nu se găsesc într-o corespondență armonioasă.

Ultima situație se întîlnește în cazul elementelor cu deschidere mare, a celor cu deschidere mijlocie cînd condiția de rigiditate este foarte riguroasă (grinzi de rulare), precum și în cazul unor elemente cu deschidere mică cînd materialul are un modul de elasticitate redus, dar o rezistență admisibilă ridicată. Această variantă de proiectare este cea mai puțin economică, nu din cauza consumului exagerat de material, ci mai ales datorită valorii ridicate a înălțimii.

Procedeul expus are o importanță practică deosebită, deoarece oferă o soluție simplă de stabilire a condiției de care trebuie să se țină cont pentru a fi garantată siguranța deplină a elementului.

Proiectarea secțiunilor include aspecte noi cînd se urmărește optimizarea acestora folosind drept criterii *capacitatea de rezistență sau rigiditatea maximă.*

De regulă, soluția cea mai economică se obține pe baza unui criteriu unic dar cerințele siguranței depline impun respectarea limitărilor care se referă atît la rezistență, cît și la deformabilitatea elementului. Pentru a rezolva această situație se obișnuiește ca în funcție de particularitățile geometrice și de încărcare, de destinația și condițiile de lucru ale structurii, să se acorde prioritate unui anumit criteriu. Se definește astfel apriori un criteriu considerat „principal", care impune soluția de alcătuire, dar varianta optimă trebuie verificată și din punctul de vedere al celuilalt criteriu, apreciat ca avînd o importanță secundară. În acest caz este necesar să se evalueze gradul de importanță al unui anumit criteriu în raport cu celălalt, să se precizeze anticipat condiția pe baza căreia trebuie să se facă dimensionarea.

Pentru unele elemente și structuri, criteriul prioritar poate fi estimat cu ușurință, dar în marea majoritate a situațiilor, indicații în acest sens se obțin numai prin calcul. Deoarece optimizarea unicriterială nu este în măsură să furnizeze garanții suficiente privind gradul de siguranță global, atunci cînd se ține seama și de cerințele altui criteriu, se recurge la o rezolvare iterativă, care, în cele mai multe cazuri, conduce la soluții diferite de cea optimă.

Această situație este evitată în optimizarea multicriterială, cînd se consideră că soluția cea mai bună este aceea ce satisface simultan sau cu un consum minim de material totalitatea criteriilor luate în considerare.

Problema prezintă un înalt grad de dificultate și nu și-a găsit încă o rezolvare satisfăcătoare. Pentru a suplini lipsa unor procedee de optimizare multicriterială s-au elaborat metodologii care pun în evidență existența anumitor relații dintre criterii. Ele oferă posibilitatea cunoașterii în mod anticipat a criteriului pe baza căruia este indicat să se facă optimizarea, evitînd calculul prin tatonări. Un procedeu eficient cu ajutorul căruia se poate preciza criteriul de optimizare prioritar, se bazează pe analiza domeniului de variație a solicitării exterioare. În acest sens se consideră că o etapă importantă în definirea formei secțiunii transversale este determinarea înălțimii elementului. Impunînd separat respectarea condiției de rezistență sau de rigiditate, se stabilesc relații de calcul

Scanned with OKEN Scanner

a înălțimii în funcție de caracteristicile geometrice, mecanice și de încărcare ale elementului.

Prin egalarea celor două expresii rezultate se obține momentul încovoietor „optim", pentru care, într-o anumită secțiune este asigurată atît capacitatea de rezistență, cît și rigiditatea necesară. Astfel

$$M_{opt}=aM^c\frac{(\beta+1)^2(\beta^2-\beta+3\alpha\beta+1)\,b^3m^3R_c^4l^3}{3\beta^4n^3E_b^3k}\left[\frac{l}{f}\right]^3 \qquad (5.1)$$

unde : a și b — coeficienți funcție de modul de rezemare și de încărcare a elementului :

M^c — momentul încovoietor de calcul ;
β — coeficient de asimetrie a secțiunii ;
$\alpha=A_{tălpi}/A_{nervură}$ — coeficient de distribuție a materialului ;
m — coeficient al condițiilor de lucru al elementului ;
R_c — rezistența de calcul a betonului ;
l — deschiderea grinzii ;
n — coeficient generalizat de supraîncărcare ;
E_b — modulul de elasticitate a betonului ;
K — modulul de rigiditate al elementului ;
f — săgeata admisibilă.

Se constată că valoarea momentului încovoietor „optim" depinde, în primul rînd, de distribuția materialului pe secțiune. În cazul secțiunii dublu T simetrice ($\beta=1$), relația (5.1) poate fi particularizată în funcție de raportul în care este repartizat materialul între tălpi și nervură. Se consideră mai întîi aria inimii egală cu cea a tălpilor și apoi se admite că aria inimii este de trei ori mai mare ca aria tălpilor. În primul caz coeficientul de repartiție a materialului (α) este egal cu unitatea, iar în al doilea caz are valoarea 1/3.

Momentul încovoietor „optim" rezultat pentru cele două moduri de alcătuire satisface relația :

$$M_{opt}^{\alpha=1}=2M_{opt}^{\alpha=1/3}. \qquad (5.2)$$

Criteriul de optimizare ce trebuie luat în considerare pentru ca elementul să prezinte o siguranță deplină se află comparînd mărimea solicitării exterioare cu valoarea sa „optimă". Atunci cînd momentul încovoietor de calcul (M^c) este mai mare ca $M_{opt}^{\alpha=1}$, secțiunea alcătuită în ideea distribuției egale a materialului între inimă și tălpi, trebuie dimensionată pe baza criteriului ce asigură rezistența necesară. În acest caz condiția de rigiditate este respectată, deformațiile elementului fiind mai mici decît cele limită.

Dar în timp ce eforturile unitare sînt apropiate de cele admisibile, indicînd o folosire rațională a proprietăților mecanice ale materialelor, capacitatea de deformare este utilizată incomplet. Cînd secțiunea este alcătuită pe baza coeficientului $\alpha=1/3$, calculele arată că este necesar un consum de material cu 13,4% mai mare. Dacă într-o anumită secțiune, momentul încovoietor de calcul (M^c) este mai mic decît $M_{opt}^{\alpha=1/3}$ secțiunea, care are inima de trei ori mai mare ca tălpile, trebuind dimensionată pe baza criteriului de rigiditate. În acest caz, capacitatea de rezistență a elementului nu este folosită rațional, eforturile unitare efective fiind mai mici ca cele admisibile. Atunci cînd solicitarea de calcul este situată în intervalul :

$$M_{opt.}^{\alpha=1\sim\omega}<M^c<M_{opt.}^{\alpha=1}$$

alcătuirea secțiunii trebuie făcută pe baza unor coeficienți situați în intervalul 1/3 ... 1, cu ajutorul relației :

$$\alpha = \frac{1}{3} + \frac{2\,(aM^c - M_{opt.}^{\alpha=1/3})}{3\,(M_{opt.}^{\alpha=1} - M_{opt.}^{\alpha=1/3})}$$

Menționăm că valorile coeficientului de repartiție a materialului (α) folosite mai sus nu sînt alese întîmplător ci sînt justificate.

Dacă se rezolvă ecuația (5.1) în raport cu R_c se determină rezistența optimă ($R_{opt.}$) a betonului în funcție de particularitățile structurii analizate. În cazul cînd $R_c \leqslant R_{opt.}$ proprietățile mecanice ale materialului sînt folosite integral, în timp ce, pentru $R_c > R_{opt.}$ este necesar să se recurgă la materiale mai puțin rezistente și în consecință mai ieftine, deoarece caracteristicile sale mecanice sînt utilizate incomplet.

Întrucît analiza soluțiilor pe baza unui singur criteriu este nesatisfăcătoare, s-au întreprins cercetări cu scopul de a stabili ordinea de prioritate în cadrul unei multitudini de soluții, fiind luate în considerare mai multe modalități de apreciere ale acestora. În acest sens citățm metoda ELECTRE elaborată în Franța și programul SELA întocmit de COCC București, cu ajutorul căruia s-a efectuat dimensionarea optimă a unor grinzi din beton precomprimat. Programul SELA include o serie de operații prin care se selectează varianta cea mai bună cu ajutorul unor scări de ierarhizare a soluțiilor. Se pornește de la o anumită secțiune, alcătuită pe baza experienței și intuiției proiectantului și se variază cu cantități finite parametrii caracteristici. Se obține astfel o mulțime de soluții constructive care se ordonează pe baza unor considerente economice, cum ar fi : cantitatea și costul betonului și al armăturii pretensionate, consumul de metal necesar confecționării tiparelor, greutatea și costul elementului.

Criteriile de apreciere se diferențiază prin atribuirea unor ponderi (note) care țin cont, atît de importanța fiecăruia în cadrul fenomenului economic la un anumit moment, cît și de faptul că unele din criterii participă direct la evaluarea altora (costul betonului și al armăturii intervin în mod implicit la definirea costului total al elementului).

5.2 Metodologii de optimizare a dimensionării grinzilor precomprimate

5.2.1. Procedeu de calcul optim în domeniul elastic

În mod general, funcția obiectiv, care reprezintă costul total al elementului se prezintă sub forma :

$$F = F(x_i, p, \sigma, c_j) \text{ cu } i = 1, \ldots, m \qquad (5.3)$$

unde :

x_i — dimensiunile optime ale secțiunii ; p — intensitatea încărcării exterioare ; σ — efortul unitar admisibil ; c — costurile unitare ale materialelor.

Restricțiile problemei de optimizare rezultă din analiza condițiilor specifice realizării și exploatării elementului. Astfel :

— eforturile unitare efective în situația cea mai defavorabilă de solicitare trebuie să fie mai mici decît cele admisibile ;

— armătura rezultată din calcul este necesară să fie mai mare decît cea corespunzătoare procentului minim ;

— variabilele problemei nu pot avea decît valori pozitive ;

— caracteristicile geometrice ale secțiunii trebuie să respecte prescripțiile de proiectare.

Introducerea restricțiilor menționate oferă soluției obținute pe criterii economice însușirea de a satisface și din punct de vedere al criteriilor tehnice ce asigură structurii rezistență , stabilitate și durabilitate în diferite faze de lucru. Această formulare a problemei este neliniară și se rezolvă într-un spațiu euclidian cu „n" dimensiuni prin una din metodele programării matematice. Se pot folosi în acest sens metoda selecției sistematice sau metoda gradientului. Ambele procedee necesită efectuarea unor calcule laborioase. Pentru reducerea numărului de tatonări este necesar ca punctul din care începe cercetarea frontierelor domeniului admisibil să fie bine ales.

S-a propus în acest sens aplicarea metodei Monte-Carlo pentru obținerea unei soluții aproximative, urmînd a fi utilizată în continuare metoda gradientului. Rezolvarea problemei cu ajutorul metodei Monte-Carlo, cu toate simplificările introduse, necesită efectuarea unor calcule suplimentare, iar corelarea celor două procedee generează o serie de dificultăți.

În cadrul capitolului acesta optimizarea operațiilor de dimensionare se face pe baza unui model matematic diferit care constă în esență în studierea derivatelor funcției obiectiv. Minimul unei funcții (F) în raport cu o anumită variabilă (x) se obține anulînd derivata parțială a funcției în raport cu variabila respectivă. În cazul unei funcții de mai multe variabile, se ajunge la un sistem de ecuații :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial x_i}=0$$

care prin rezolvare conduce la aflarea parametrilor optimi. Sistemul de relații impus de modelul matematic fiind complicat și volumul de muncă necesar rezolvării lui deosebit de mare, determinarea eficientă a soluției optime se poate face numai cu ajutorul mijloacelor automate de calcul.

Deoarece calculul vizează domeniul elastic de comportare, este posibil, ca utilizînd facilitățile pe care le oferă analiza în acest domeniu. să se exprime anumite caracteristici geometrice și de rigiditate ale secțiunii, precum și funcția de cost, ca funcții polinomiale de un anumit parametru (de exemplu înălțimea secțiunii). În acest fel se va determina într-o primă fază valoarea optimă a acestei variabile, rezolvînd ecuația polinomială cu coeficienți reali ce se obține prin anularea derivatei funcției obiectiv în raport cu înălțimea secțiunii. Pe baza relațiilor dintre stările de tensiuni acceptate în diverse faze de solicitare și caracteristicile geometrice ale secțiunii se stabilește în continuare profilul longitudinal al elementului, conformația geometrică a secțiunii transversale și cantitatea de armătură activă.

În metodele obișnuite de dimensionare înălțimea secțiunii este considerată de regulă o mărime cunoscută, ea rezultînd sau fiind impusă din alte considerente decît cele de rezistență. Cu ajutorul unor relații simple, caracteristicile geometrice și de rigiditate se pot determina în funcție de acest parametru. Deoarece stabilirea înălțimii nu are la bază un calcul propriu-zis, acest procedeu de dimensionare nu este riguros. În plus, valorile impuse fiind situate în domenii largi de variație (se recomandă ca înălțimea elementului să se găsească în intervalul 1/9...1/15 din deschidere), este necesar să se efectueze un număr ridicat de tatonări, pînă cînd soluția satisface în totalitate condițiile problemei. În metoda prezentată aceste deficiențe sînt eliminate. Incovenientele ce decurg din modul tradițional de abordare a problemei dispar dacă se utilizează criterii economice.

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile suplimentare impuse de necesitatea satisfacerii acestor criterii oferă posibilitatea determinării exacte a înălțimii, care altfel se alege arbitrar.

Calculul se face în secțiunea cea mai solicitată, determinîndu-se într-o primă fază valoarea optimă a parametrului considerat prin minimizarea funcției de cost. Pentru grinda din fig. 5.2 funcția de cost pe unitatea de lungime are expresia :

$$F = A_b C_b + \gamma_a A_p C_{ap} + P_a/l \qquad (5.4)$$

în ideea că toate cheltuielile referitoare la manoperă și utilaj, precum și costul cofrajului sînt incluse în costul materialelor, iar aria secțiunii de beton se exprimă sub forma :

$$A_b = [bh + (b_s - b)\, h_s + (b_i - b)\, h_i] \qquad (5.5)$$

În relația (5.4) s-au făcut următoarele notații :
C_b — costul unitar al betonului ; C_{ap} — costul unitar al armăturii active (lei/kg) γ_a — greutatea specifică a oțelului (daN/m) ; P_a — costul total al armăturii pasive (lei) și are următoarea semnificație :

$$P_a = A_{as} C_{as} + A_{aL} C_{aL} + A_{a01} C_{a01} + A_{a02} C_{a02} + A_{ap1} C_{ap1} + A_{ap2} C_{ap2}$$

unde cu A_a și C_a s-au notat cantitățile de armătură, respectiv prețurile unitare ale acestora, iar indicii suplimentari se referă : s — la sîrma trasă mată ; L — la consumul de produse laminate ; 01 — la $0B.37$ cu $\varnothing \leqslant 10$ mm. ; 02 — la 0B·37 cu $\varnothing > 10$ mm. ; P1 — la PC.52 cu $\varnothing \leqslant 10$ mm. ; P2 — la PC.52 cu $\varnothing > 10$ mm. Deoarece studiul efectuat vizează doar optimizarea cantității de beton și armătură activă, armătura pasivă, dispusă pe considerente constructive, este luată în considerare pe baza consumurilor curente existente la elementele similare. Pentru secțiunea schematizată din fig. 5.2 dacă se atribuie anumite valori grosimii inimii (b) și înălțimilor tălpilor (h_s și h_i) ; prin prelucrarea relațiilor dintre stările de tensiuni și caracteristicilor geometrice ale secțiunii, se deduce că ariile de beton (A_b) și armătura (A_p) sînt funcții polinomiale de ordin superior în raport cu h

$$A_b = f_1(h^n), \quad A_p = f_2(h^m) \qquad (5.6)$$

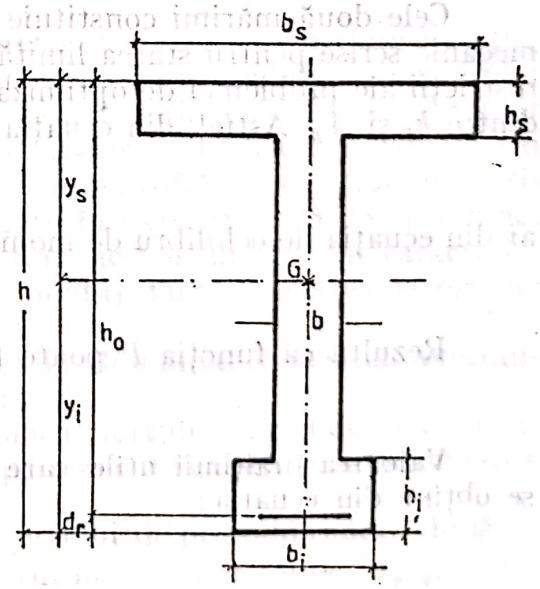
Funcția de cost, prin care se apreciază economicitatea soluției, reprezintă, de asemenea, o relație de tipul :

$$F = f_3(h^p) \qquad (5.7)$$

exponenții n, m, p, fiind numere întregi și pozitive. Valoarea înălțimii care conduce la un minim al funcției de cost se obține dintr-un studiu al soluțiilor ecuației :

$$\frac{dF(h)}{dh} = 0 \qquad (5.8)$$

Rădăcinile ecuației (5.8) formează un șir de numere din rîndul cărora unul singur reprezintă soluția problemei. Pentru selectarea acesteia se ține cont nu numai de faptul că soluția căutată minimizează funcția de cost, dar se are în vedere și semnificația ei geometrică. Pe baza acestor consi-



SECȚIUNE DUBLU T NESIMETRIC SCHEMATIZATĂ

Fig. 5.2

derente înălțimea optimă se determină comparînd valorile funcției obiectiv cînd înălțimii i se atribuie valori numerice ce corespund soluțiilor reale și pozitive ale ecuației (5.8). Dacă încărcarea este uniform distribuită, înălțimea economica prezintă în lungul elementului o lege de variație parabolică, identică cu cea a momentului încovoietor. Condițiile de rezistență ce trebuie respectate în zonele de reazem impun adoptarea unor profile longitudinale care diferă într-o măsură oarecare de cel corespunzător soluției optime, fără ca această situație să determine consumuri de materiale mult sporite. Deoarece în practică există numeroase situații cînd se recurge la folosirea unor grinzi cu înălțime constantă, în capitol este abordat modul de calcul al unor astfel de elemente.

5.2.2. Procedeu de calcul optim în faza de cedare

Procedeul de optimizare a proiectării grinzilor precomprimate în faza de cedare urmărește în esență determinarea celei mai economice valori a înălțimii secțiunii transversale și a cantității de armătură corespunzătoare.

Principiile teoretice ale metodei de calcul optim sînt dezvoltate pentru elementul cu moment de inerție constant, în ipoteza că unele caracteristici geometrice ale secțiunii de beton sînt mărimi cunoscute. Rezolvarea problemei pornește de la premiza că în secțiunea de moment maxim, înălțimea economică h conduce la un minim al funcției de cost. Pentru elemente de formă de I nesimetric (fig. 5.2) costul pe unitate de lungime se exprimă cu relația :

$$F=[b(h_0+d_r)+(b_s-b)\,h_s+(b_i-b)\,h_i]\,C_b+\gamma_a A_a C_{ap}+\frac{P_a}{l} \tag{5.9}$$

Dacă sînt cunoscute : lățimea nervurii, b, dimensiunile tălpilor (b_s, h_s, b_i, h_i) precum și cantitatea și costul armăturii nepretensionate, care se stabilesc prin comparație cu elementele de gabarit și caracteristici de încărcare similare, se constată că funcția obiectiv F depinde de modul de variație a lui h_0 și A_p, adică :

$$F=f_1(h_0, A_p) \tag{5.10}$$

Cele două mărimi constituie variabile independente. Ecuațiile de echilibru mecanic scrise pentru starea limită de rezistență, care în cazul de față reprezintă restricții ale problemei de optimizare, oferă posibilitatea evidențierii dependenței dintre h_0 și A_p. Astfel, din ecuația de proiecție de forțe se deduce :

$$A_p=f_2(x) \tag{5.11}$$

ar din ecuația de echilibru de momente se constată că :

$$X=f_3(h_0) \tag{5.12}$$

Rezultă că funcția F poate fi exprimată sub forma :

$$F=f_4(h_0) \tag{5.13}$$

Valoarea înălțimii utile care determină un minimum al funcției de cost se obține din ecuația :

$$\frac{dF(h_0)}{dh_0}=0 \tag{5.14}$$

Ea reprezintă soluția economică a problemei, iar variația acesteia în lungul elementului este afină cu cea a momentului încovoietor. Deoarece inițial

nu este cunoscută nici poziția axei neutre x, nici valoarea efortului unitar din armătura activă în momentul cedării secțiunii ($\sigma_p = m_p R_p$), este necesar să se recurgă la un calcul iterativ, impunînd o valoare uzuală pentru efortul σ_{pl} și presupunînd că zona de beton comprimată se extinde pe o anumită înălțime a secțiunii transversale. Calculul ce se efectuează în continuare are drept scop verificarea ipotezelor introduse și corectarea lor treptată (dacă este cazul), pînă se constată o concordanță satisfăcătoare între valorile adoptate inițial și cele rezultate. În cadrul metodei preconizate se stabilesc mai întîi relații de dimensionare în cele două situații definite de axa neutră.

Pentru o anumită poziție a acesteia și considerînd o valoare arbitrară a coeficientului condițiilor de lucru, m_p, se determină cu relații corespunzătoare cazului considerat înălțimea utilă economică h_{0e}, înălțimea zonei comprimate x_e și cantitatea de armătură pretensionată A_{pe}. Atunci cînd valoarea lui x_e rezultată din calcul definește o poziție a axei neutre în concordanță cu ipoteza făcută, relațiile de dimensionare au fost utilizate corect și este posibil să se calculeze în continuare mărimea exactă a coeficientului m_p. Dacă valoarea lui m_p, stabilită prin calcul coincide cu cea impusă, mărimile h_{0e} și A_{pe} sînt determinate corect și calculul are un caracter definitiv. În cazul cînd coeficientul m_p rezultat diferă de cel adoptat la început, se impune ca element inițial valoarea lui m_p obținută după prima iterație și se refac calculele. Operația se repetă de atîtea ori, pînă cînd diferența dintre două valori succesive devine suficient de mică. Dacă axa neutră nu a fost localizată cu exactitate prin ipoteza făcută inițial, este necesar să se folosească relațiile de dimensionare corespunzătoare poziției sale corecte, urmînd să se asigure printr-un procedeu similar cu cel expus mai sus, concordanța dintre valoarea lui m_p impusă și cea rezultată.

5.3 Dimensionarea optimă a grinzilor precomprimate în domeniul elastic

5.3.1. Condiții de rezistență specifice domeniului elastic

a) **Solicitări și eforturi unitare**

Datorită existenței stării artificiale de tensiuni introduse înainte de aplicarea încărcărilor exterioare, sau odată cu acestea, în proiectarea elementelor și structurilor de beton precomprimat este necesar să se țină seama de un număr mai mare de situații de încărcare decît cele considerate la betonul armat. Un interes deosebit prezintă faza de transfer, cînd se dezvoltă uneori eforturi periculoase de întindere în zonele ce vor fi solicitate în exploatare la compresiune. De asemenea, în elementele prefabricate, apar stări de tensiuni ce sînt caracteristice numai fazelor de transport, manipulare și montaj, fără ca acestea să mai fie întîlnite și în alte situații.

În conformitate cu normele de proiectare din România, elementele precomprimate se calculează în două faze de încărcare :

— *faza inițială*, cînd se ține cont de acțiunea efortului inițial de precomprimare N_0 și de momentul produs de încărcările permanente existente la terminarea transferului M_g ;

— *faza finală*, cînd intervine acțiunea efortului de precomprimare după ce s-au produs pierderile de tensiuni $\overline{N}_0$ și momentul încărcărilor totale M_{g+p}.

În funcție de nivelul de solicitare, elementele de beton precomprimat se află în diferite stadii de lucru. Limitele ce despart aceste stadii, depind nu numai de calitatea materialelor, ci și de gradul de precomprimare, precum și de modi-

ficarea în timp a mărimii eforturilor inițiale. Luarea în considerare a unui anumit stadiu de lucru necesită adoptarea unor ipoteze și schematizări privind stările de eforturi și deformații. Astfel, calculul eforturilor unitare normale în beton și armătură în secțiuni nefisurate (stadiul I, clasele I și II de verificare la fisurare) se face presupunînd materialul omogen, elastic și izotrop. Ipoteza betonului elastic este în concordanță cu comportarea sa reală, atîta timp cît eforturile de compresiune sînt relativ reduse și, mai ales, cînd pe secțiune nu există eforturi normale de întindere.

Dacă această ipoteză este respectată, în evaluarea stării de tensiuni se aplică principiul independenței efectelor. În consecință, este posibil să se determine în mod separat eforturile unitare produse de precomprimare și de încărcările exterioare în diferite faze și să se însumeze algebric. Caracteristic betonului precomprimat este faptul că valoarea eforturilor din precomprimare, deci și intensitatea solicitării generate de acestea, prezintă o variabilitate continuă în timp. Ca urmare a dezvoltării pierderilor de tensiuni, în exploatare, stările de tensiuni transmise betonului sînt mai mici decît în momentul transferului. Evaluarea corectă a siguranței elementelor precomprimate necesită o analiză a modificărilor pe care le suferă tensiunile introduse inițial. Se folosește în acest sens noțiunea de efort de precomprimare în faza inițială,

$$N_0 = A_p \sigma_{p0}$$

corespunzător situației create imediat după transfer, cînd pierderile sînt relativ mici și ele se datoresc în special operațiilor incluse în tehnologia de precomprimare. La consumarea tuturor pierderilor de tensiuni, elementul se află în faza finală, iar efortul de precomprimare corespunzător este :

$$\bar{N}_0 = A_p \bar{\sigma}_{p0}$$

Eforturile unitare în armătura tensionată se determină cu relațiile :

— în faza inițială : $\sigma_{p0} = \sigma_{pi} - (\Delta\sigma_\lambda + \Delta\sigma_s + \Delta\sigma_t + \Delta\sigma_{ri} + \Delta\sigma_f)$

— în faza finală : $\bar{\sigma}_{p0} = \sigma_{p0} - [(\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_{ri}) + \Delta\sigma\bar{\varphi}]$

efortul de control σ_{pi} respectînd condițiile impuse de norme.

Acțiunea exercitată de precomprimare asupra elementului în ansamblu, poate fi asimilată cu o forță exterioară aplicată excentric. În consecință, distribuția pe secțiune a eforturilor unitare normale, depinde nu numai de mărimea acțiunii, ci și de poziția sa pe înălțimea secțiunii. În studiul întreprins, exemplificările sînt făcute în ideea precomprimării totale, presupunîndu-se că armătura activă este dispusă numai în zona întinsă a elementului. Întrucît armăturile (activă și pasivă) se află în proporții reduse, ele se neglijează în evaluarea caracteristicilor geometrice și de rigiditate ale secțiunii.

Dacă momentul încovoietor produs de efectul precomprimării este negativ, iar momentul încărcărilor exterioare este pozitiv, *în faza inițială*, eforturile unitare în beton și armătură sînt (fig. 5.3) :

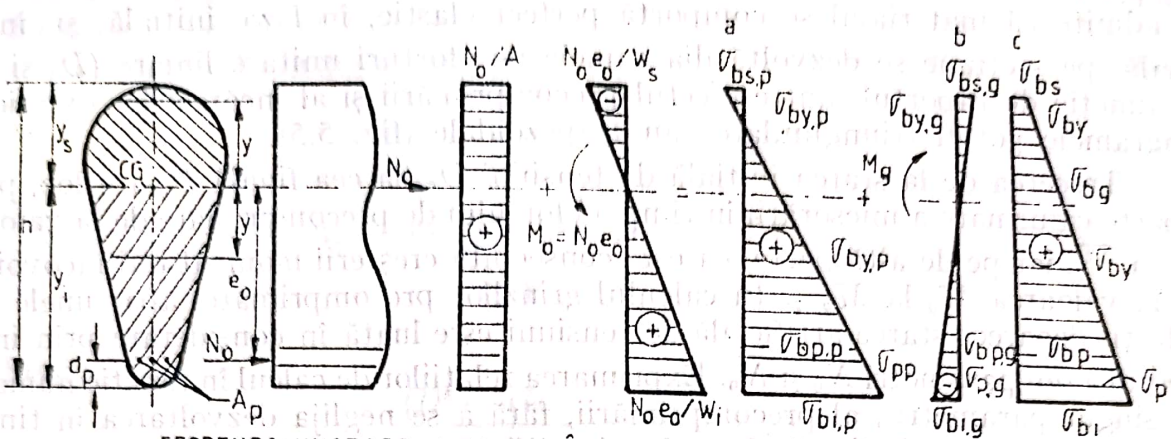
— din acțiunea precomprimării ;

$$\sigma_{bv,p} = \frac{N_0}{A_b} \mp \frac{N_0 e_0}{I_b} \cdot y; \quad \bar{\sigma}_{pp} = \sigma_{p0} - n_p \sigma_{bv,p}$$

— din acțiunea precomprimării și a încărcărilor exterioare ;

$$\sigma_{by}=\frac{N_0}{A_p}\mp\frac{N_0e_0}{I_b}\cdot y\pm\frac{M_g}{I_b}\cdot y,\ \sigma_{p,g}=n_p\sigma_{p,g},\ \sigma_p=\sigma_{p0}-$$

$$-n_p\sigma_{bp}=\sigma_{p0}-n_p(\sigma_{bp,p}-\sigma_{bp,g})$$



EFORTURI UNITARE NORMALE ÎN BETON ȘI ARMĂTURĂ ÎN FAZA INIȚIALĂ
a. din acțiunea precomprimării,
b. din acțiunea solicitărilor exterioare,
c. eforturi unitare totale

Fig. 5.3

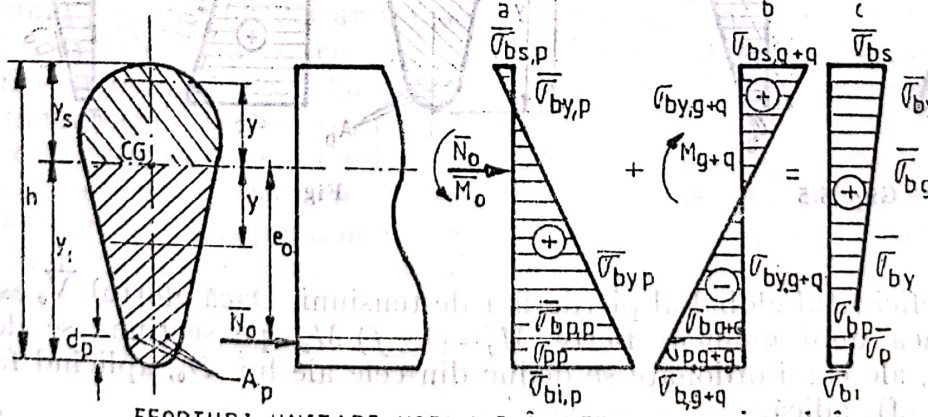
În *faza finală* eforturile unitare în beton și armătură au expresiile (fig. 5.4) :

— din acțiunea precomprimării :

$$\bar{\sigma}_{by,p}=\frac{\bar{N}_0}{A_b}\mp\frac{\bar{N}_0e_0}{I_b}\cdot y,\ \bar{\sigma}_{pp}=\bar{\sigma}_{p0}-n_{pb}\bar{\sigma}_{bp,p}$$

— din acțiunea precomprimării și a încărcărilor exterioare:

$$\bar{\sigma}_{by,p}=\frac{N_0}{A_b}\mp\frac{N_0e_0}{I_b}\cdot y\pm\frac{\bar{M}_{g+q}}{I_b}\cdot y,\ \bar{\sigma}_{p,\,g+q}=n_p\bar{\sigma}_{bp,\,g+q}\ ;\ \bar{\sigma}_p=\bar{\sigma}_{p0}-n\bar{\sigma}_{bp}$$



EFORTURI UNITARE NORMALE ÎN BETON ȘI ARMĂTURĂ ÎN FAZA FINALĂ :
a. din acțiunea precomprimării;
b. din acțiunea solicitărilor exterioare;
c. eforturi unitare totale

Fig. 5.4

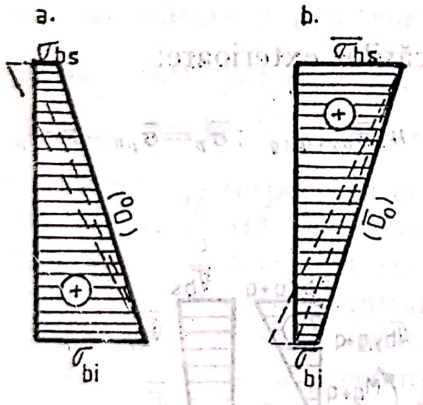
b) **Procedeu de omogenizare a diagramelor de tensiuni**

Spre deosebire de elementele din betonul armat, care se dimensionează și se verifică pentru o singură valoare a solicitării exterioare, cele din betonul precomprimat se calculează luînd în considerare două valori ale solicitărilor. Dacă se admite că materialul se comportă perfect elastic, în faza inițială și în cea finală, pe secțiune se dezvoltă diagramele de eforturi unitare liniare (D_0 și $\overline{D}_0$). În funcție de raportul dintre efectul precomprimării și al încărcărilor exterioare, diagramele pot fi triunghiulare sau trapezoidale (fig. 5.5).

Trecerea de la starea inițială de tensiuni D_0, la cea finală $\overline{D}_0$ are loc, pe de o parte ca urmare a micșorării în timp a efortului de precomprimare de la valoarea N_0 la $\overline{N}_0$, iar pe de altă parte, ea este consecința creșterii momentului încovoietor de la valoarea M_g la M_{g+q}. În calculul grinzilor precomprimate, apar unele dificultăți, deoarece starea artificială de tensiuni este luată în considerare prin intermediul a doi parametri N_0 și $\overline{N}_0$. Exprimarea relațiilor de calcul în funcție numai de un singur parametru, al precomprimării, fără a se neglija dezvoltarea în timp a pierderilor de tensiuni, conduce la simplificarea apreciabilă a operațiilor de dimensionare și verificare. Alegînd ca element de referință efortul $\overline{N}_0$ în ambele faze de lucru, se poate defini o metodologie care permite exprimarea eforturilor unitare din faza inițială de parametrul considerat.

În acest sens se determină mai întîi diagrama fictivă D^*, generată de acțiunea eforturilor M_g și $\overline{N}_0$. Această diagramă, caracterizată prin existența eforturilor unitare σ^*_{bi} și σ^*_{bs} în fibrele extreme ale secțiunii (fig. 5.6) se află considerînd că dependența dintre mărimile N_0 și $\overline{N}_0$ se exprimă sub forma :

$$\overline{N}_0=(1-f)\,N_0 \qquad (5.15)$$



Gig. 5.5

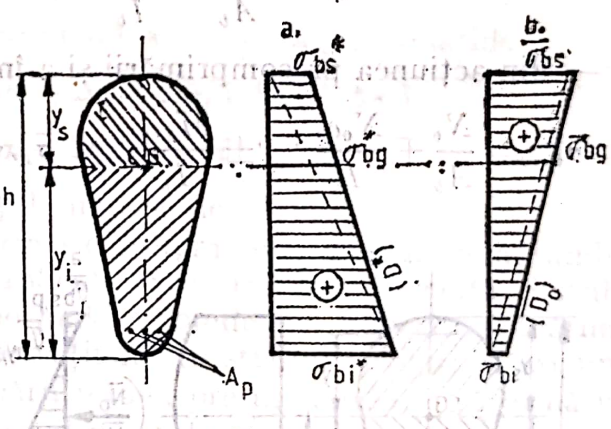


Fig. 5,6

unde f este coeficientul global al pierderilor de tensiuni. Dacă efortul $\overline{N}_0$ este asociat cu acțiunea unui moment fictiv $M'_g=(1-f)\,M_g$, pe secțiune se dezvoltă diagrama (D'), ale cărei ordonate se deduc din cele ale lui D_0, aplicînd factorul de corecție (1—f), adică :

$$(D')=[1-f]\times(D_0) \qquad (5.16)$$

Pentru a transforma diagrama (D') în (D^*) este necesar să intervină un moment suplimentar :

$$M_g-M'_g=fM$$

Starea de tensiuni D' poate fi schimbată în $\bar{D}_0$ dacă se aplică momentul suplimentar :

$$M_{g+q} - M'_g = M_q + fM_g$$

În relația de mai sus M_q reprezintă momentul încovoietor care se exercită după ce s-a efectuat transferul, acesta fiind produs de încărcările permanente și utile ce intervin în faza de exploatare. Pe baza raționamentului expus rezultă :

$$\frac{(D^*)-(D')}{(\bar{D}_0)-(D')} = \frac{fM_g}{M_q+fM_g}$$

Împărțind membrul drept prin fM_g și notînd :

$$\Psi = \frac{M'_g}{M_q}$$

se obține :

$$\frac{(D^*)-(D')}{(\bar{D}_0)-(D')} = \frac{f\Psi}{1+f\Psi}$$

sau :

$$(D^*) = \frac{(D')+f\Psi(\bar{D}_0)}{1+f\Psi}$$

și înlocuind pe (D') cu valoarea dată de 5.16 se deduce :

$$(D^*) = \frac{[1-f]\times(D_0)+f\Psi(\bar{D}_0)}{1+f\Psi} \qquad (5.17)$$

Este definită astfel diagrama fictivă (D^*) în funcție de diagramele reale (D_0) și $(\bar{D}_0)$ și de coeficienții f și Ψ. Pe baza relației 5.17 se exprimă eforturile unitare fictive σ^*_{bs} și σ^*_{bi} sub forma :

$$\sigma^*_{bs} = \frac{(1-f)\,\sigma_{bs}+f\Psi\bar{\sigma}_{bs}}{1+f\Psi}, \quad \sigma^*_{bi} = \frac{(1-f)\,\sigma_{bi}+f\Psi\bar{\sigma}_{bi}}{1+f\Psi} \qquad (5.18)$$

Pentru a opera cu ajutorul acestei stări de tensiuni se presupun cunoscute într-o primă aproximație valorile coeficienților f și Ψ. Mărimea reală a pierderilor de tensiuni, precum și solicitarea reală produsă de greutatea proprie se determină în finalul calculului, după ce s-a efectuat dimensionarea. Atunci este posibil să se verifice justețea ipotezei făcute inițial privind mărimea coeficienților utilizați. Dacă diferențele dintre valorile impuse și cele rezultate sînt destul de mari, calculul se reface de atîtea ori pînă cînd acestea devin acceptabile. Considerînd că, în cele două faze de lucru pe secțiune se dezvoltă numai eforturi unitare de compresiune (fig. 5.6), printr-un raționament simplu se deduc relațiile de calcul ale efortului unitar în beton din dreptul centrului de greutate al secțiunii. În faza inițială se găsește :

$$\sigma^*_{bg} = \sigma^*_{bs}\frac{y_i}{h} + \sigma^*_{bi}\frac{y_s}{h} \qquad (5.19)$$

Acesta prezintă o importanță aparte, iar semnificația lui poate fi evidențiată pornind de la expresiile eforturilor unitare în fibrele extreme :

$$\sigma^*_{bs} = \frac{\bar{N}_0}{A_b} - \frac{\bar{N}_0 e_0 y_s}{I_b} + \frac{M_g y_s}{I_b}\ ; \quad \sigma^*_{bi} = \frac{\bar{N}_0}{A_b} + \frac{\bar{N}_0 e_0 y_i}{I_b} - \frac{M_g y_i}{I_b}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind prima relație cu y_i, a doua cu y_s și adunîndu-le se obține :

$$\sigma^*_{bs} y_i + \sigma^*_{bi} y_s = \frac{\overline{N}_0}{A_b} h \tag{5.20}$$

Din compararea relațiilor (5.19) și (5.20), rezultă :

$$\sigma^*_{bg} = \frac{\overline{N}_0}{A_b} \tag{5.21}$$

Deci, efortul unitar în beton, în dreptul centrului de greutate al secțiunii, este egal cu efortul unitar produs de $\overline{N}_0$, considerat ca acționînd centric.

O analiză similară, efectuată în faza finală, conduce la concluzia :

$$\overline{\sigma}_{bg} = \overline{\sigma}_{bs} \frac{y_i}{h} + \overline{\sigma}_{bi} \frac{y_s}{h} = \frac{\overline{N}_0}{A_b} \tag{5.22}$$

Rezultă :

$$\sigma^*_{bg} = \overline{\sigma}_{b0} = \sigma_{bg} \tag{5.23}$$

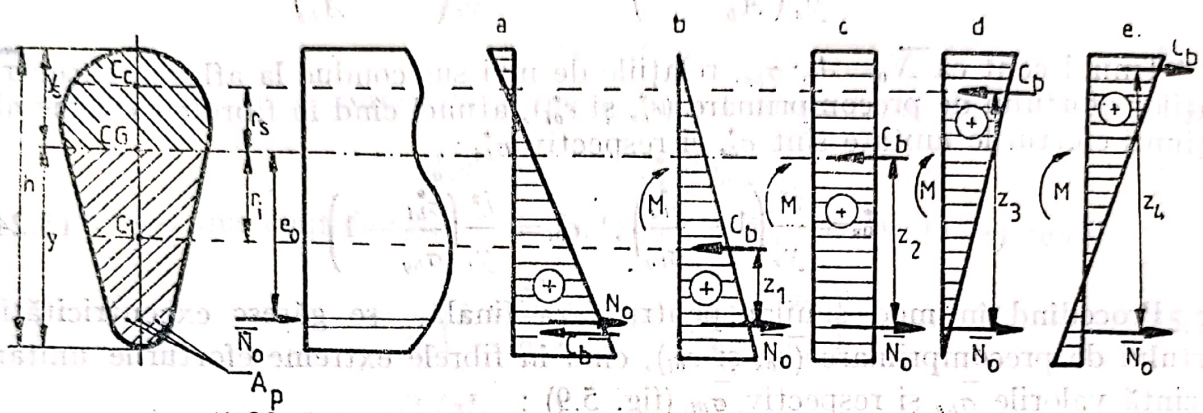
Se constată că prin omogenizarea diagramelor de eforturi în cele două faze de lucru (introducerea unui singur parametru al precomprimării $\overline{N}_0$) efortul unitar din beton la nivelul centrului de greutate al secțiunii, păstrează o valoare constantă pentru diferite niveluri de solicitare. Într-o anumită fază de lucru, aceasta depinde de mărimea efortului de precomprimare și de poziția centrului de greutate al secțiunii (y_i și y_s).

c) **Domenii de variație ale centrului de presiune**

Într-un element de construcție echilibrul mecanic este asigurat atît timp cît există egalitate între momentul încărcărilor exterioare și momentul cuplului interior. Orice modificare a intensității solicitării exterioare determină o variație a momentului interior ca urmare a schimbării mărimii rezultantelor eforturilor unitare și a brațului cuplului interior. O grindă de beton precomprimat, static determinată, sub efectul precomprimării se găsește în echilibru deoarece acțiunea armăturii asupra betonului este egală și de sens contrar cu reacțiunea pe care o exercită betonul asupra armăturii. Elementul nu este supus nici unei solicitări exterioare și are posibilitatea să se deformeze liber sub acțiunea efortului de precomprimare. În baza condiției de echilibru rezultă că momentul cuplului interior este nul. Secțiunile transversale sînt însă active din punct de vedere al stării de tensiuni, deoarece există eforturi de întindere în armătură și de compresiune în beton. Starea de echilibru a unei grinzi precomprimate static determinată, în lipsa încărcărilor exterioare, poate fi explicată admițînd că brațul cuplului interior este egal cu zero, ceea ce înseamnă că rezultatele eforturilor unitare din armătură, $\overline{N}_0$ și beton C_b, acționează după același suport (fig. 5.7a). Exercitarea unei acțiuni exterioare, modifică echilibrul existent pe secțiune și determină apariția unui moment rezistent. Întrucît armătura are o poziție obligată, asigurarea brațului cuplului interior z se face numai prin deplasarea rezultantei eforturilor din beton, față de poziția inițială. Punctul său de aplicație, denumit și centru de presiune, se apropie de fibra superioară a secțiunii pe măsură ce intensitatea acțiunii exterioare crește. Din condiția :

$$M = \overline{N}_0 \cdot z = C_b \cdot z$$

rezultă că brațul cuplului este o funcție liniară de momentul exterior, cu ajutorul lui fiind definită poziția forței C_b. Deoarece creșterea solicitării determină nu numai sporirea brațului cuplului interior, ci modifică și distribuția eforturilor unitare normale, se poate stabili o legătură directă între variațiile diagramei de eforturi și deplasarea rezultantei C_b pe înălțimea secțiunii. Într-un element de beton precomprimat, poziția centrului de presiune caracterizează starea de eforturi corespunzătoare nivelului de solicitare existent.



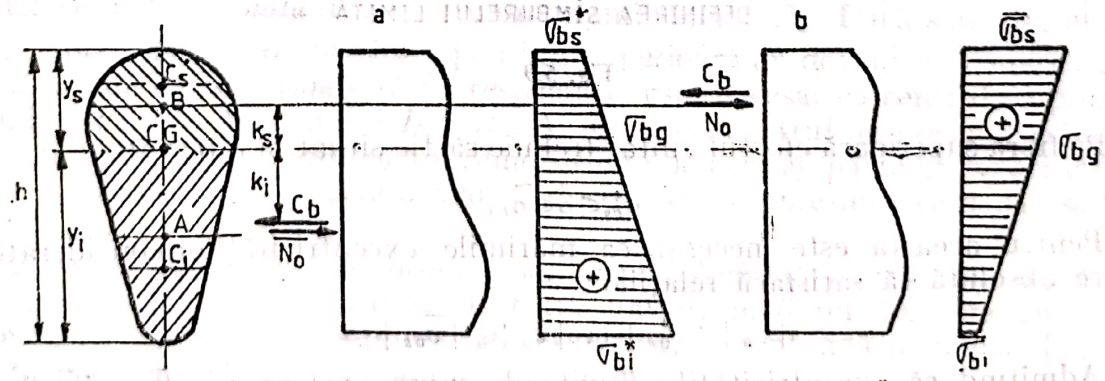
VARIAȚIA DIAGRAMEI DE EFORTURI UNITARE ÎN FUNCȚIE DE DEPLASAREA CENTRULUI DE PRESIUNE PE ÎNĂLȚIMEA SECȚIUNII

Fig. 5.7

Dacă centrul de presiune se află în interiorul *sîmburelui central*, pe întreaga secțiune se dezvoltă numai eforturi unitare de compresiune (fig. 5.7c).

Limitele lui se găsesc cu ușurință, analizînd în cele două faze de lucru situațiile ce apar cînd în fibrele extreme eforturile unitare sînt nule (fig. 5.7b și d). Deosebit de utilă în studiul compportării elastice a grinzilor de beton precomprimat este noțiunea de sîmbure limită. Se admite că stările de tensiuni interioare sînt consecința exercitării numai a efectului precomprimării (centrul de presiune și centrul de greutate al armăturii active coincid).

Dacă în faza inițială, centrul de presiune se găsește în punctul A, iar în faza finală se deplasează în B, definirea domeniului limită implică determinarea distanțelor la care se află punctele limită față de centrul de greutate al secțiunii (fig. 5.8).



STĂRI DE TENSIUNI PRODUSE DE EFECTUL PRECOMPRIMĂRII
a faza inițială, b faza finală.

Fig. 5.8

Se pornește de la expresiile eforturilor unitare extreme în faza inițială

$$\sigma^*_{bs}=\frac{\overline{N}_0}{A_b}\left(1-\frac{e_0 y_s}{I_b}\right),\quad \bar{\sigma}_{bi}=\frac{\overline{N}_0}{A_b}\left(1+\frac{e_0 y_i}{I_b}\right)$$

care pot fi scrise și sub forma :

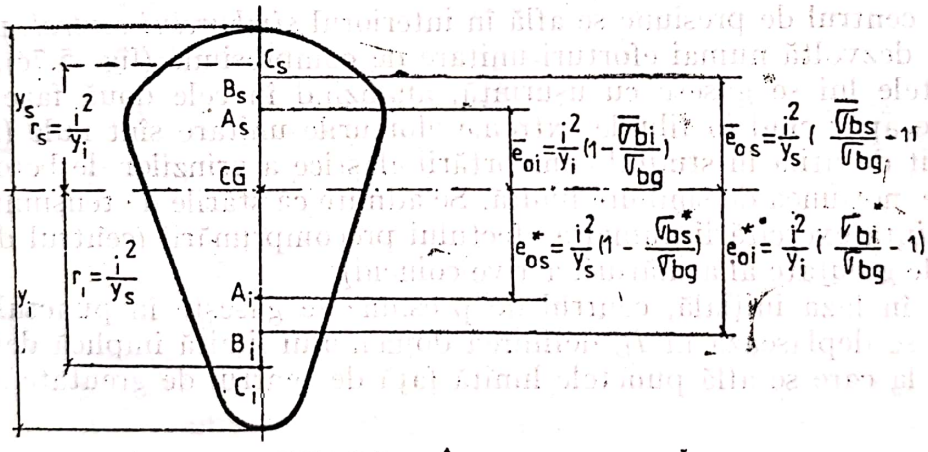
$$\overline{N}_0 e_0=\frac{I_b}{y_s}\left(\frac{\overline{N}_0}{A_b}-\sigma^*_{bs}\right),\quad \overline{N}_0 e_0=\frac{I_b}{y_i}\left(\sigma^*_{bi}-\frac{\overline{N}_0}{A_b}\right)$$

Ținînd cont că $\overline{N}_0=A_b\cdot\sigma_{bg}$, relațiile de mai sus conduc la aflarea excentricităților efortului de precomprimare (e^*_{os} și e^*_{oi}), atunci cînd în fibrele extreme ale secțiunii eforturile unitare sînt σ^*_{bs} și respectiv σ^*_{bi} :

$$e^*_{os}=\frac{i^2}{y_s}\left(1-\frac{\sigma^*_{bs}}{\sigma_{bg}}\right),\quad e^*_{oi}=\frac{i^2}{y_i}\left(\frac{\sigma^*_{bi}}{\sigma_{bg}}-1\right) \tag{5.24}$$

Procedînd în mod similar pentru faza finală, se găsesc excentricitățile efortului de precomprimare ($\bar{e}_{os}$ și $\bar{e}_{oi}$), cînd în fibrele extreme eforturile unitare prezintă valorile $\bar{\sigma}_{bs}$ și respectiv $\bar{\sigma}_{bi}$ (fig. 5.9) :

$$\bar{e}_{os}=\frac{i^2}{y_s}\left(\frac{\bar{\sigma}_{bs}}{\sigma_{bg}}-1\right),\quad \bar{e}_{oi}=\frac{i^2}{y_i}\left(1-\frac{\bar{\sigma}_{bi}}{\sigma_{bg}}\right) \tag{5.25}$$



DEFINIREA SÎMBURELUI LIMITĂ

Fig. 5.9

Pe fibra superioară efortul unitar trebuie să fie situat în intervalul :

$$\sigma^*_{bs}\leqslant\sigma\leqslant\bar{\sigma}_{bs}$$

Pentru aceasta este necesar ca mărimile excentricităților considerate în valoare absolută să satisfacă relațiile :

$$|e_0|\leqslant|e^*_{os}|\ \text{și}\ |e_0|\leqslant|\bar{e}_{os}|$$

Admițind că excentricitățile situate deasupra axei neutre ($\bar{e}_{os}$ și $\bar{e}_{oi}$) sînt pozitive, iar cele situate dedesubt (e^*_{os} și e^*_{oi}) sînt negative, rezultă :

$$-e^*_{os}\leqslant e_0\leqslant\bar{e}_{os} \tag{5.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, este necesar ca pe fibra inferioară extremă să existe relațiile :

$$\sigma_{bi} \leqslant \sigma \leqslant \bar{\sigma}^*_{bi}$$

Inegalitățile sînt satisfăcute numai dacă sînt îndeplinite condițiile :

$$| e_0 | \leqslant | \bar{e}_{0i} | \text{ și } | e_0 | \leqslant | e^*_{0i} |$$

sau, ținînd cont de convenția de semn făcută mai sus rezultă :

$$-e^*_0 \leqslant e_0 \leqslant \bar{e}_{0i} \tag{5.27}$$

Grupînd în mod convenabil termenii inegalităților (5.26) și (5.27) se obține :

$$-e^*_{0s} \leqslant e_0 \leqslant \bar{e}_{0i}, \quad -e^*_{0i} \leqslant e_0 \leqslant \bar{e}_{0s} \tag{5.28}$$

Dacă se ține cont de egalitățile (5.24) și (5.25), relațiile (5.28) devin :

$$-\frac{i^2}{y_s}\left(1-\frac{\sigma^*_{bs}}{\sigma_{bg}}\right) \leqslant e_0 \leqslant \frac{i^2}{y_i}\left(1-\frac{\bar{\sigma}_{bi}}{\sigma_{bg}}\right) \tag{5.29}$$

$$-\frac{i^2}{y_i}\left(\frac{\sigma^*_{bi}}{\sigma_{bg}}-1\right) \leqslant e_0 \leqslant \frac{i^2}{y_s}\left(\frac{\bar{\sigma}_{bs}}{\sigma_{bg}}-1\right) \tag{5.30}$$

Sînt stabilite astfel limitele pe care excentricitățile nu le pot depăși în jos (faza inițială) sau în sus (faza finală). Membrul stîng al inegalităților (5.29) arată că centrul de presiune nu poate coborî în *faza inițială* sub un anumit punct A_i. Dacă acesta ar fi situat mai jos de A_i pe fibra superioară s-ar dezvolta eforturi mai mici ca σ^*_{bs}., înregistrîndu-se valori negative (eforturi de întindere), atunci cînd $e^*_{0s} > r_i$. Membrul stîng al inegalităților (5.29) arată că centrul de presiune nu trebuie să se ridice în *faza finală* deasupra unui anumit punct A_s. Dacă acesta s-ar găsi mai sus de A_s, pe fibra inferioară ar exista eforturi mai mici ca $\bar{\sigma}_{bi}$, obținîndu-se valori negative, dacă $\bar{e}_{0i} > r_s$. Pentru ca limitele inferioare să fie respectate, este necesar ca centrul de presiune să rămînă interior domeniului $A_i - A_s$. Membrul stîng al inegalităților (5.36) arată că centrul de presiune nu trebuie să coboare în *faza inițială*, sub un anumit punct B_i. Dacă acesta s-ar situa mai jos de B_i, eforturile de compresiune pe fibra inferioară ar deveni mai mari ca σ^*_{bi}.

Membrul drept al inegalității (5.30) arată că centrul de presiune nu trebuie să se ridice în *faza finală* deasupra unui anumit punct B_s. Dacă s-ar afla mai sus de B_s, eforturile de compresiune pe fibra superioară ar deveni mai mari ca $\bar{\sigma}_{bs}$. Pentru ca limitele superioare să fie respectate, este necesar ca centrul de presiune să rămînă interior domeniului $B_i - B_s$. Atunci cînd centrul de presiune părăsește intervalul menționat, pe fibrele extreme situate de aceeași parte în raport cu centrul de greutate al secțiunii se dezvoltă eforturi de compresiune ce depășesc limitele impuse.

Domeniul limită este regiunea cea mai mică definită de punctele A_i, B_i, A_s, B_s.

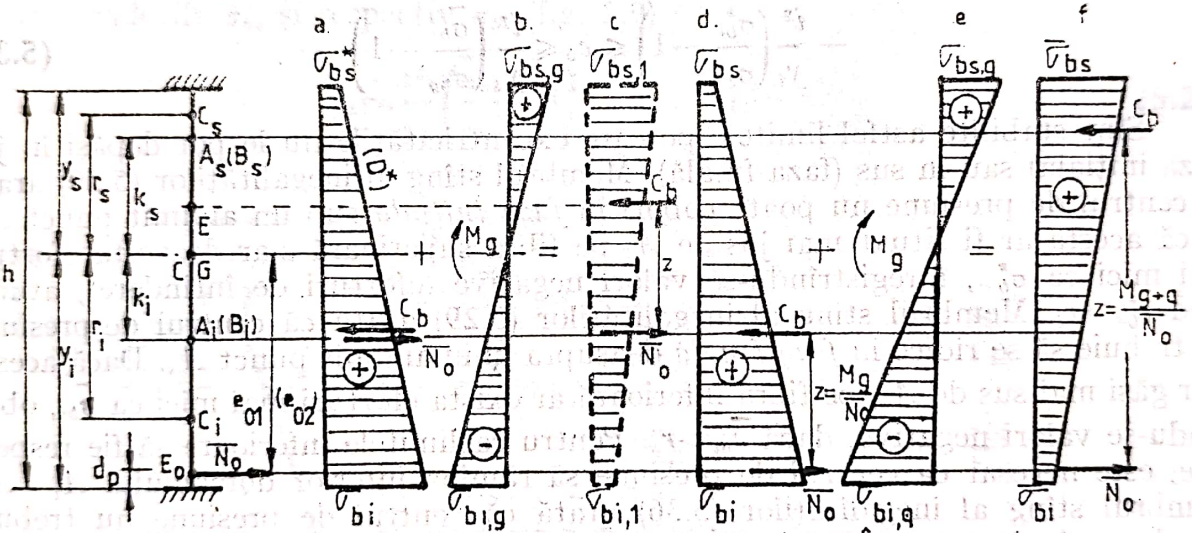
Atunci cînd în faza inițială eforturile unitare în fibrele extreme sînt σ^*_{bs} și σ^*_{bi}, punctele A_i și B_i se confundă. De asemenea, se confundă punctele A_s și B_s, dacă în faza finală eforturile unitare în fibrele extreme sînt egale cu $\bar{\sigma}_{bs}$ și $\bar{\sigma}_{bi}$. Dacă eforturile extreme nu sînt atinse în totalitate (deschiderea este mai mare decît deschiderea critică), punctele limită A_i și B_i pe de o parte, A_s și B_s pe de altă parte, nu se confundă. În mod curent se admite ca valoare limită a excen-

Scanned with OKEN Scanner

tricităților pozitive punctul A_s, a cărui poziție se găsește cu ușurință, pornind de la limita superioară a sîmburelui central (i^2/y) și reducînd această valoare cu termenul $(1 - \bar{\sigma}_{bi}/\sigma_{bg})$. Pentru excentricitățile negative, se va considera în funcție de situația concretă, ca valoare limită, unul din punctele A_i sau B_i.

d) **Relații între eforturile unitare normale și caracteristicile geometrice ale secțiunii**

Domeniul limită a fost definit în ipoteza „precomprimării pure", fără să se țină cont de acțiunea încărcărilor exterioare. Realizarea în aceste condiții în faza inițială a diagramei fictive D^* (fig. 5.10a) corespunde situației cînd atît centrul de greutate al armăturii, cît și centul de presiune se află în punctul limită inferior $A_i(B_i)$. În realitate, precomprimarea nu se exercită izolat, deoarece odată cu transferarea eforturilor de la armătură la beton, intervine în majoritatea cazurilor și acțiunea greutății proprii, precum și alte încărcări existente în faza inițială. Starea de eforturi generată de acțiunea momentului încovoietor M_g (fig. 5.10 b) se însumează cu diagrama D^*, determinînd situația din fig. 5.10 c. Ea poate fi interpretată ca rezultat al deplasării centrului de presiune într-un punct oarecare E_0 ca urmare a exercitării acțiunilor exterioare.



DISTRIBUȚII ALE EFORTURILOR UNITARE NORMALE ÎN ELEMENTE ÎNCOVOIATE DIN BETON PRECOMPRIMAT

Fig. 5.10

Desprinderea forței C_b de suportul său inițial este impusă de necesitatea realizării unui cuplu rezistent ce are rolul de a echilibra solicitarea exterioară, brațul cuplului fiind egal cu $z = M_g/\bar{N}_0$.

Pentru ca în această stare de încărcare să se obțină diagrama D^*, proprie fazei inițiale, este necesar ca centrul de presiune să revină în $A_i(B_i)$ (fig. 5.10 d). Brațul cuplului interior poate fi menținut la valoarea cerută de nivelul solicitării, numai dacă efortul de precomprimare se deplasează în jos față de poziția sa inițială cu cantitatea z. În acest fel, efortul de precomprimare $\bar{N}_0$ se va găsi față de centrul de greutate al secțiunii la distanța $\overline{E_0G}$ care în cazul general (eforturile unitare în fibrele extreme nu sînt atinse în totalitate), are una din valorile:

$$e_{01} = \frac{i^2}{y_s}\left(1 - \frac{\sigma^*_{bs}}{\sigma_{bg}}\right) + \frac{M_g}{\bar{N}_0} \quad \text{sau} \quad e_{02} = \frac{i^2}{y_i}\left(\frac{\sigma^*_{bi}}{\sigma_{bg}} - 1\right) + \frac{M_g}{\bar{N}_0}$$

Rezultă că existența solicitării exterioare M_g determină creșterea excentricității forței de precomprimare cu mărimea $M_g/\bar{N}_0$ față de situația cînd pe secțiune s-ar fi exercitat numai acțiunea precomprimării. Dispunerea armăturii la o anumită distanță față de axa neutră, ca urmare a cerinței de a asigura o poziție neschimbată centrului de presiune, introduce o condiție restrictivă cu privire la poziția armăturii. Tehnologiile actuale de preîntindere a armăturii impun situarea acesteia în interiorul secțiunii de beton. În consecință, starea de tensiuni în faza inițială este realizată numai dacă centrul de greutate al armăturii active se găsește la o anumită distanță față de fibra inferioară a secțiunii. Trebuie deci respectată condiția : $e_0 \leqslant y_i - d_p$.

Exercitarea unui moment suplimentar M_q (fig. 5.10 e) modifică starea de tensiuni existentă și conduce la situația din fig. 5.10 f. Această schimbare poate fi atribuită deplasării centrului de presiune din punctul $A_i(B_i)$ în $A_s(B_s)$, mărimea ei reprezentînd tocmai brațul cuplului interior ce echilibrează solicitarea suplimentară din faza finală. Pe baza acestei interpretări se poate concluziona că în fibra superioară, efortul unitar trece de la valoarea σ^*_{bs} la $\bar{\sigma}_{bs}$ (fig. 5.10 d și f), atunci cînd centrul de presiune parcurge domeniul limită deplasîndu-se din punctul $A_i(B_i)$ în $A_s(B_s)$. Distanța dintre aceste puncte este însă egală cu :

$$e^*_{0s}+\bar{e}_{0s}=\frac{i^2}{y_s}\left(1-\frac{\sigma^*_{bs}}{\sigma_{bg}}\right)+\frac{i^2}{y_s}\left(\frac{\bar{\sigma}_{bs}}{\sigma_{bg}}-1\right) \text{ sau } e^*_{0s}+\bar{e}_{0s}=\frac{i^2}{y_s}\left(\frac{\bar{\sigma}_{bs}-\sigma^*_{bs}}{\sigma_{bg}}\right) \qquad (5.31)$$

Ținînd seama că brațul cuplului interior produs de creșterea momentului exterior de la valoarea M_g la M_{g+q} este :

$$e^*_{0s}+\bar{e}_{0s}=\frac{M_{g+q}-M_g}{\bar{N}_0}=\frac{M_q}{\bar{N}_0}$$

relația (5.31) devine :

$$\frac{i^2}{y_s}\left(\frac{\bar{\sigma}_{bs}-\sigma^*_{bs}}{\sigma_{bg}}\right)=\frac{M_q}{\bar{N}_0} \qquad (5.32)$$

Deoarece $i^2=I_b/A_b$, iar $\sigma_{bg}=\bar{N}_0/A_b$, rezultă :

$$\frac{I_b}{y_s}=\frac{M_q}{\bar{\sigma}_{bs}-\sigma^*_{bs}} \qquad (5.33)$$

Analizînd posibilitatea ca în fibra inferioară efortul unitar să parcurgă domeniul de la σ^*_{bi} la $\bar{\sigma}_{bi}$ și procedînd în mod similar, se obține :

$$\frac{I_b}{y_i}=\frac{M_q}{\sigma^*_{bi}-\bar{\sigma}_{bi}} \qquad (5.34)$$

Împărțind ecuația (5.34) la (5.33) se găsește :

$$\frac{y_s}{y_i}=\frac{\bar{\sigma}_{bs}-\sigma^*_{bs}}{\sigma^*_{bi}-\bar{\sigma}_{bi}} \qquad (5.35)$$

Dacă se fac notațiile : $\Delta\sigma_s=\bar{\sigma}_{bs}-\sigma^*_{bs}$ și $\Delta\sigma_i=\sigma^*_{bi}-\bar{\sigma}_{bi}$ rezultă că :

$$\frac{I_b}{y_s}=\frac{M_q}{\Delta\sigma_s}, \quad \frac{I_b}{y_i}=\frac{M_q}{\Delta\sigma_i}, \quad \frac{y_s}{y_i}=\frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\sigma_i} \qquad (5.36)$$

Din prima relație (5.36) se obține poziția centrului de greutate al secțiunii, în funcție de înălțimea acesteia :

$$y_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\sigma_i + \Delta\sigma_s} \cdot h, \quad y_s = \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta\sigma_i + \Delta\sigma_s} \cdot h \tag{5.37}$$

iar din relațiile (5.33) și a doua din (5.37) se deduce expresia momentului de inerție :

$$I_b = \frac{M_q}{\Delta\sigma_s + \Delta\sigma_i} \cdot h \tag{5.38}$$

5.3.2. Calculul optim al grinzilor cu deschiderea mai mică decît deschiderea critică

a) **Deschidere critică. Relații de calcul**

Presupunînd inițial că rezultatele eforturilor interioare din beton acționează în punctul limită inferior, admitem că pe secțiune se exercită numai efectul precomprimării (fig. 5.10 a). Pentru ca sub acțiunea momentului încovoietor, produs de greutatea proprie, starea de tensiuni să rămînă neschimbată, este necesar ca rezultanta eforturilor din armatură N_0 să coboare în punctul E_0 (fig. 5.10 d). Distanța parcursă z reprezintă tocmai brațul cuplului interior ce echilibrează acțiunea exterioară. Dacă se respectă condiția :

$$z = \frac{M_g}{N_0} \leqslant y_i - d_p - k_i$$

sub efectul precomprimării greutatea proprie este compensată în totalitate iar capacitatea de rezistență a elementului este utilizată integral, deoarece în fibrele extreme sînt atinse efectiv cele patru eforturi limită. În acest caz, sub acțiunea momentului M_q, centrul de presiune parcurge în întregime sîmburele limită (fig. 5.10 f) :

$$K_i + K_s = \frac{M_q}{N_0} \quad \text{sau} \quad \frac{M_q}{K_i + K_s} = N_0$$

Se obține astfel inegalitatea :

$$\frac{M_g}{M_q} \leqslant \frac{y_i - d_p - k_i}{k_i + k_s}$$

care, în cazul încărcărilor uniform distribuite devine :

$$g \leqslant \frac{y_i - d_p - k_i}{k_i + k_s} \cdot q$$

Deoarece q este o mărime constantă, stabilită prin tema de proiectare, greutatea proprie g crește odată cu mărimea deschiderii și nu mai satisface condiția de mai sus atunci cînd deschiderea elementului depășește o anumită valoare, denumită *deschiderea critică* (L_{crit}). Aceasta reprezintă limita pentru care greutatea proprie este compensată în întregime de efectul precomprimării.

Grinzile avînd deschiderea $L \leqslant L_{crit}$ se bucură de proprietatea că dimensionarea nu este influențată de efectul greutății proprii. Secțiunile de beton și armătură sînt determinate de solicitarea din faza finală M_q, situație ce simplifică simțitor proiectarea elementelor.

Scanned with OKEN Scanner

Secțiunea dublu T nesimetric, este definită în mod general de cinci variabile: aria secțiunii de beton A_b, modulii de rezistență $(I/y_i,\ I/y_s)$, efortul de precomprimare $\overline{N}_0$ și poziția sa pe secțiune e_{0p}. Elementele arbitrare ce intervin în alegerea ariei, atunci cînd se ține cont numai de condiția de rezistență exprimată sub formă de tensiuni sînt înlăturate dacă se pornește de la premiza că profilul trebuie să reprezinte soluția cea mai economică la un anumit consum de material. Pentru determinarea acestor mărimi se folosesc relațiile deduse mai sus rezolvîndu-se într-o primă fază problema distribuirii materialului pe secțiune cînd este respectată condiția de rezistență. Notînd cu $\Delta\sigma_s$ și $\Delta\sigma_i$ diferențele de efort ce apar în fibra superioară, respectiv inferioară, ca urmare a trecerii din faza inițială în cea finală :

$$\Delta\sigma_i=\frac{(1-f)\,\sigma_{bi}-\bar{\sigma}_{bi}}{1+f\Psi},\quad \Delta\sigma_s=\frac{\bar{\sigma}_{bs}-(1-f)\,\sigma_{bs}}{1+f\Psi},\quad \Delta\sigma_i+\Delta\sigma_s=\frac{(\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi})-(1-f)(\sigma_{bs}-\sigma_{bi})}{1+f\Psi}$$

relațiile (5.37) și (5.38) devin :

$$y_i=\frac{(1-f)\sigma_{bi}-\bar{\sigma}_{bi}}{(\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi})-(1-f)(\sigma_{bs}-\sigma_{bi})}\cdot h,\ y_s=\frac{\bar{\sigma}_{bs}-(1-f)\,\sigma_{bs}}{(\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi})-(1-f)(\sigma_{bs}-\sigma_{bi})}\cdot h \tag{5.39}$$

$$I_b=\frac{M_g(1+f\Psi)h}{(\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi})-(1-f)(\sigma_{bs}-\sigma_{bi})} \tag{5.40}$$

În cazul grinzii simplu rezemate, de deschidere l, acționată de o încărcare uniform distribuită q, momentul încovoietor în secțiunea mediană are expresia $M_g=ql^2/8$ și întrucît termenul

$$1+f\Psi=1+f\frac{M_g}{M_q}=1+f\frac{g}{q}=1+f\frac{\gamma_b}{q}A_b$$

relația (5.40) se transformă în :

$$I_b=\frac{l^2(q+f\gamma_bA_b)h}{8[(\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi})-(1-f)(\sigma_{bs}-\sigma_{bi})]} \tag{5.41}$$

Introducînd valorile lui y_i și y_s determinate mai sus în (5.22) se obține expresia efortului unitar în beton în dreptul centrului de greutate al secțiunii

$$\sigma_{bg}=\frac{(1-f)(\sigma_{bi}\cdot\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi}\cdot\sigma_{bs})}{(\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi})-(1-f)(\sigma_{bs}-\sigma_{bi})} \tag{5.42}$$

Din analiza relațiilor deduse rezultă că în timp ce eforturile unitare fictive din faza inițială (σ^*_{bs} și σ^*_{bi}) depind atît de valoarea pierderilor de tensiuni f cît și de efectul greutății proprii (prin intermediul coeficientului Ψ), poziția centrului de greutate al secțiunii $(y_i,\ y_s)$ precum și efortul unitar în beton în dreptul acestuia, sînt independente de greutatea proprie, ele fiind funcție numai de f. Greutatea proprie nu influențează dimensionarea secțiunilor (în cazul în care deschiderea grinzii este inferioară celei critice) atît timp cît efortul de precomprimare se menține constant în timp. Prin luarea în considerație a variabilității efortului de precomprimare ca urmare a producerii pierderilor de tensiuni, efectul greutății proprii influențează modul de evaluare a caracteristicilor de rigiditate (5.40)

Neglijarea, într-o primă etapă de calcul, a pierderilor de tensiuni, constituie una din premisele ce stau la baza teoriei dimensionării elastice a grinzilor precomprimate. Procedeul prezintă o serie de incooveniente teoretice și practice, motiv pentru care nu a fost acceptat în studiul întreprins.

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul relațiilor (5.37) și (5.38) profilul secțiunii transversale este definit, dacă se cunoaște mărimea ariei. Secțiunea de beton se poate determina în funcție de caracteristicile de bază ale elementului (b și h) precum și de înălțimile tălpilor (h_i și h_s), considerînd ca necunoscute ariile tălpilor (A_i și A_s). Pentru aflarea lor se folosește un sistem de două ecuații în care este evidențiată dependența dintre elementele geometrice ale secțiunii. Prima relație reprezintă expresia momentului static în raport cu fibra superioară, iar a doua este expresia momentului de inerție în raport cu centrul de greutate al secțiunii. Se obține astfel:

$$\text{I}\begin{cases}[bh+(A_b-bh_s)+(A_i-bh_i)]\,y_s= \\ =0{,}5\,bh^2+0{,}5\,(A_s-bh_s)\,h_s+(A_i-bh_i)\,(h-0{,}5\,h_i) \\ I_b=\dfrac{b}{3}(y_i^3+y_s^3)+(A_s-bh_s)\,(y_s-0{,}5\,h_s)^2+(b_s-b)\,\dfrac{h_s^3}{12}+ \\ +(A_i-bh_i)\,(y_i-0{,}5\,h_i)^2+(b_i-b)\,\dfrac{h_i^3}{12}\end{cases} \tag{5.43}$$

Ordonînd termenii, găsim:

$$\text{II}\begin{cases}A_s(y_s-0{,}5\,h_s)-A_i(y_i-0{,}5\,h_i)=0{,}5bh(y_i-y_s)+bh_s\,(y_s-0{,}5\,h_s)- \\ -bh_i(y_i-0{,}5\,h_i) \\ A_s[(y_s-0{,}5\,h_s)^2+h_s^2/12]+A_i[(y_i-0{,}5\,h_i)^2+h_i^2/12]=I_b- \\ -b(y_i^3+y_s^3)/3+bh_s(y_s-0{,}5\,h_s)^2+bh_i(y_i-0{,}5\,h_i)^2+b(h_i^3+h_s^3)/12\end{cases} \tag{5.44}$$

Dacă atribuim eforturilor unitare normale din fibrele extreme valori admisibile ($\sigma_{bs,a}$; $\sigma_{bi,a}$; $\bar{\sigma}_{bs,a}$; $\bar{\sigma}_{bi,a}$) și notînd în relațiile (5.38):

$$a_1=(1-f)\sigma_{bi,a}-\bar{\sigma}_{bi,a},\quad a_2=(\bar{\sigma}_{bs,a}-\bar{\sigma}_{bi,a})-(1-f)(\sigma_{bs,a}-\sigma_{bi,a}),\quad a_3=a_1/a_2$$

$$a_4=\bar{\sigma}_{bs,a}-(1-f)\,\sigma_{bs,a},\quad a_5=a_4/a_2$$

se obține:

$$y_i=a_3h,\quad y_s=a_5h \tag{5.45}$$

Notînd deasemenea:

$$a_6=\frac{l^2q}{8[(\bar{\sigma}_{bs,a}-\bar{\sigma}_{bi,a})-(1-f)(\sigma_{bs,a}-\sigma_{bi,a})]}=\frac{l^2q}{8a_2}$$

$$a_7=\frac{l^2f\gamma_b}{8[(\bar{\sigma}_{bs,a}-\bar{\sigma}_{bi,a})-(1-f)(\sigma_{bs,a}-\sigma_{bi,a})]}=\frac{l^2f\gamma_b}{8a_2}$$

$$a_8=(1-f)(\bar{\sigma}_{bi,a}\cdot\bar{\sigma}_{bs,a}-\bar{\sigma}_{bi,ab}\cdot\bar{\sigma}_{s,b})$$

relația (5.41) devine:

$$I_b=(a_6+a_7A_b)\,h \tag{5.46}$$

iar relația (5.42) se transformă în:

$$\sigma_{bg}=a_8/a_2 \tag{5.47}$$

În funcție de parametrii aleși, aria secțiunii de beton se exprimă sub forma:

$$A_b=bh+A_s+A_i-2b(a_s+a_i)\ \text{unde}\ a_s=0{,}5\ h_{si}\ ;\ a_i=0{,}5\ h_i \tag{5.48}$$

Ținînd cont de (5.48) expresia momentului de inerție devine:

$$I_b=[a_6-2a_7(a_s+a_i)b+a_7(A_s+A_i)]h+a_7bh^2$$

În aceste condiții sistemul II se transformă în :

$$\text{III}\begin{cases} A_s(a_5h-a_s)-A_i(a_3h-a_i)=0{,}5(a_3-a_5)\,bh^2-2(a_ia_3-a_sa_5)bh+2(a_i^2-a_s^2)b \\ A_s[a_5^2h^2-(2a_sa_5+a_7)h+4a_s^2/3]+A_i[a_3^2h^2-(2a_ia_3+a_7)h+ \\ +4a_i^3/3]=b(a_3^3+a_5^3)h^3/3+[a_7+2(a_sa_5^2+a_ia_3^2)]bh^2+ \\ +[a_6-2a_7(a_i+a_s)b-4(a_s^2a_5+a_i^2a_3)b]h+8(a_i^3+a_s^3)b/3 \end{cases} \tag{5.50}$$

Soluția acestui sistem este :

$$A_s=\Delta_1/\Delta_0,\quad A_i=\Delta_2/\Delta_0 \tag{5.51}$$

Deoarece : $A_b=bh+A_s+A_i-b(h_s+h_i)$ și ținînd cont de relațiile (5.51), aria secțiunii de beton se scrie sub forma :

$$A_b=\Delta_3/\Delta_0 \tag{5.52}$$

Este posibil ca și secțiunea de armătură A_p să fie explicitată în funcție de aceleași elemente. Pentru aceasta se admite că efortul unitar de calcul în faza finală $\bar{\sigma}_{p0}$ este o mărime cunoscută și egală cu :

$$\bar{\sigma}_{p0}=(1-f)\,\sigma_{p0}$$

În aceste condiții, secțiunea de armătură se determină cu relația :

$$A_p=\frac{\overline{N}_0}{\bar{\sigma}_{p0}} \tag{5.53}$$

Efortul de precomprimare $\overline{N}_0$ se calculează în funcție de datele inițiale ale problemei impunînd condiția ca eforturile unitare normale din fibrele extreme ale secțiunii să atingă valorile admisibile, adică :

$$\frac{\overline{N}_0}{A_b}+\frac{\overline{N}_0e_{0p}y_i}{I_b}-\frac{M_{g+q}}{I_b}\cdot y_i=\bar{\sigma}_{bi,a};\quad \frac{\overline{N}_0}{A_b}-\frac{\overline{N}_0e_{0p}y_s}{I_b}+\frac{M_{g+q}}{I_b}y_s=\bar{\sigma}_{bs,a}$$

Din aceste relații se deduce :

$$\overline{N}_0e_{0p}=\frac{I_b}{y_i}\left(\bar{\sigma}_{bi,a}-\frac{\overline{N}_0}{A_b}\right)+M_{g+q};\quad \overline{N}_0e_{0p}=\frac{I_p}{y_s}\left(\frac{\overline{N}_0}{A_b}-\bar{\sigma}_{bs,a}\right)+M_{g+q}$$

Înmulțind prima relație cu y_s, a doua cu y_i și adunîndu-le, se obține .

$$\overline{N}_0=\frac{I_b}{he_{0p}}(\bar{\sigma}_{bi,a}-\bar{\sigma}_{bs,a})+\frac{M_{g+q}}{e_{0p}} \tag{5.54}$$

Avînd în vedere relația (5.41), precum și faptul că în secțiunea mediană :

$$M_{g+q}=\frac{l^2}{8}(q+\gamma_bA_b)$$

expresia efortului de precomprimare devine :

$$\overline{N}_0=\frac{l^2}{8e_{0p}}\left[\frac{(q+f\gamma_bA_b)(\bar{\sigma}_{bi,a}-\bar{\sigma}_{bs,a})}{(\bar{\sigma}_{bs,a}-\bar{\sigma}_{bi,a})-(1-f)(\bar{\sigma}_{bs,a}-\bar{\sigma}_{bi,a})}+(q+\gamma_bA_b)\right] \tag{5.55}$$

iar cea a secțiunii de armătura este :

$$A_p = \frac{l^2}{8\bar{\sigma}_{p0} e_{0p} a_2} [q(\bar{\sigma}_{bi,a} - \bar{\sigma}_{bs,a}) + \gamma_b (f\bar{\sigma}_{bi,a} - f\bar{\sigma}_{bs,a} + a_2) A_b] \tag{5.56}$$

unde s-a notat :

$$a_2 = (\bar{\sigma}_{bs,a} - \bar{\sigma}_{bi,a}) - (1-f)(\sigma_{bs,a} - \sigma_{bi,a})$$

Expresia funcției de cost (5.4) poate fi scrisă sub forma :

$$F = C_b \left(A_b + \frac{\gamma_a C_{ap}}{C_b} A_p \right) + \frac{P_a}{l} \tag{5.57}$$

Dacă se ține cont de (5.56) și se fac notațiile :

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_a C_{ap}}{C_b \bar{\sigma}_{p0}}, \quad \alpha_2 = \frac{l^2 q(\bar{\sigma}_{bi,a} - \bar{\sigma}_{bs,a} + a_2)}{8 a_2}, \quad \alpha_3 = \frac{L^2 \gamma_b (f\bar{\sigma}_{bi,a} - \bar{\sigma}_{bs,a} + a_2)}{8 a_2}$$

rezultă :

$$\bar{N}_0 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 A_b}{a_3 h - d_r} \tag{5.58}$$

precum și :

$$F = C_b \left[A_b + \frac{\alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3 A_b)}{e_{0p}} \right] + \frac{P_a}{l} \tag{5.59}$$

Deoarece în această fază de calcul, armătura activă nu este cunoscută nici ca mărime, nici ca poziție, excentricitatea „e_{0p}" poate fi apreciată doar în mod aproximativ. Impunînd o valoare arbitrară d_r distanței de la centrul de greutate al armăturii pînă la fibra inferioară, se obține :

$$e_{0p} = y_i - d_r = a_3 h - d_r \tag{5.60}$$

În acest caz, relația (5.59) devine :

$$F = \frac{C_b}{a_3 h - d_r} (\alpha_4 + \alpha_5 A_b + a_3 h A_b) + \frac{P_a}{l} \tag{5.61}$$

unde s-a notat :

$$\alpha_4 = \alpha_1 \alpha_2, \quad \alpha_5 = \alpha_1 \alpha_3 - d_r$$

Ținînd cont de faptul că A_b se poate exprima în funcție de h cu ajutorul relației (5.52) după o serie de operații algebrice, funcția de cost se prezintă în final sub forma :

$$F = \frac{C_b (\beta_1 h^5 + \beta_2 h^4 + \beta_3 h^3 + \beta_4 h^2 + \beta_6)}{\gamma_1 h^4 + \gamma_2 h^3 + \gamma_3 h^2 + \gamma_4 h + \gamma_5} + \frac{P_a}{l} \tag{5.62}$$

unde coeficienții $\beta_1 \ldots \beta_6$ și $\gamma_1 \ldots \gamma_5$ sînt mărimi exprimate în funcție de datele problemei.

Extremele funcției F se obțin pentru valori ale variabilei h care anulează derivata dF/dh. Efectuînd operațiile de derivare în raport cu înălțimea secțiunii și egalînd cu zero se obține ecuația :

$$\theta_1 h^8 + \theta_2 h^7 + \theta_3 h^6 + \theta_4 h^5 + \theta_5 h^4 + \theta_6 h^3 + \theta_7 h^2 + \theta_8 h + \theta_9 = 0.$$

coeficienții $\theta_1, \ldots, \theta_9$ fiind expresii funcție de datele inițiale.

Scanned with OKEN Scanner

5.3.3. Calculul optim al grinzilor cu deschiderea mai mare decît deschiderea critică

a) **Condiții de rezolvare a problemei**

Încărcările permanente din faza inițială sînt compensate în totalitate, dacă rezultanta eforturilor unitare din armătura $\overline{N}_0$ se găsește față de punctul limită inferior la distanța z. Numai în acest caz, sub acțiunea eforturilor $\overline{N}_0$ și M_g se obține starea de tensiuni descrisă de diagrama D^*. În același timp, punctul de aplicație al forței $\overline{N}_0$ nu trebuie să coboare sub o anumită limită

$$z_1 = y_i - d_p - k_i$$

Dacă $z > z_1$, pentru a se realiza diagrama D^* este necesar ca armătura să fie situată la exteriorul secțiunii, cerință incompatibilă cu exigențele constructive, care impun poziționarea armăturii în interiorul secțiunii transversale. Această situație, care se exprimă analitic prin relația : $\Delta_z = Z - Z_1$, se obține micșorînd brațul cuplului interior z prin reducerea greutății proprii.

Există posibilitatea să se acționeze și asupra lui z_1, fie mărind înălțimea secțiunii, fie deplasînd punctul limită inferior (deci și centrul de greutate al secțiunii) spre fibra superioară. Codificarea greutății proprii sau a înălțimii elementului, implică un volum însemnat de calcule, deoarece soluția se determină prin tatonări. Deplasarea centrului de greutate al secțiunii în condiția menținerii constante a înălțimii calculate anterior, reprezintă un procedeu mai rațional de rezolvare a problemei, deoarece nu mai este necesar să se efectueze un calcul iterativ. Prin schimbarea poziției centrului de greutate se modifică însă repartiția materialul pe secțiune, iar uneori și greutatea proprie. Rezultă că procedeul are la bază, atît variația lui z_1 cît și a lui z. În acest caz nu mai sînt atinse efectiv cele patru eforturi admisibile din diagramele D^* și $\overline{D}_0$ ci numai trei din ele, după cum rezultă din următorul raționament. Dimensionarea secțiunii în formă de dublu T nesimetric cînd înălțimea h este cunoscută, implică determinarea a cinci necunoscute :

$$A_b\ ;\ I_b/y_{ti};\ I_b/y_s\ ;\ \overline{N}_0\ ;\ e_{0p}.$$

Problema se rezolvă cu ajutorul unui sistem de ecuații ce exprimă condițiile de realizare a eforturilor unitare limită în fibrele extreme. Cînd se alege un anumit tip de secțiune (grinda în T, în dublu T, chesonată, etc.), aria este practic impusă prin dimensiunile care permit să se obțină I_b/y_i, I_b/y_s. Deschiderea ele-elementelor fiind mai mare decît cea critică, efortul de precomprimare trebuie situat cît mai jos pe secțiune, în scopul de a compensa o fracțiune cît mai mare din greutatea proprie. Se fixează astfel o valoare limită a excentricității e_{0p} care devine o mărime cunoscută. Numărul de variabile s-a redus la trei și pentru rezolvarea problemei este suficient să se impună condiția realizării în fibrele extreme a trei din valorile eforturilor unitare prescrise. În această situație trebuie precizată combinația cea mai avantajoasă de tensiuni. Problema a fost studiată și a rezultat că din mulțimea soluțiilor posibile, cel mai rațional este cazul prezentat în figura 5.11 b. Afirmația făcută se întemeiază pe argumentul că în faza finală este necesar ca secțiunea de beton să fie utilizată la maximum.

Trebuie deci ca sub încărcările de exploatare să se obțină diagrama $\overline{D}_0$ cu condiția ca efortul unitar $\overline{\sigma}_{bi}$ să prezinte o valoare cît mai redusă (dacă este

Scanned with OKEN Scanner

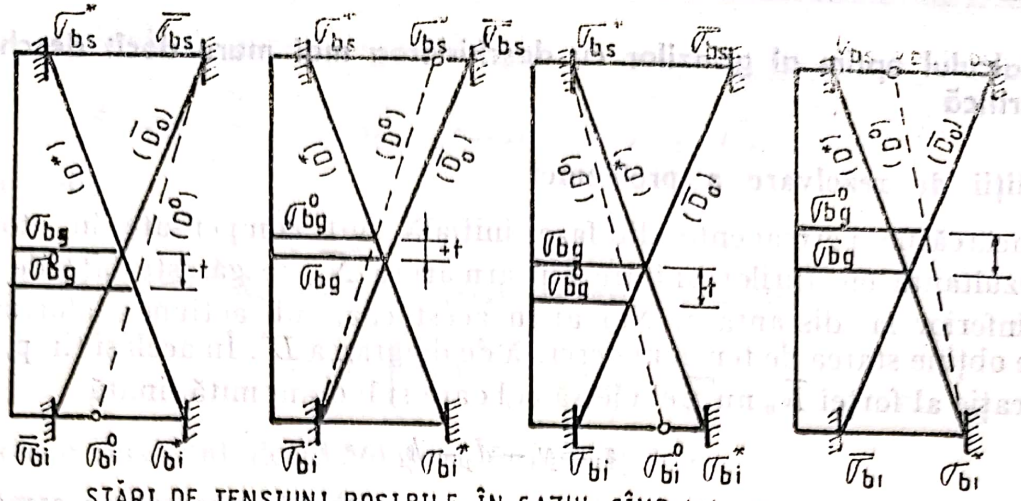


Fig. 5.11

posibil chiar negativă), iar efortul unitar $\bar{\sigma}_{bs}$ să fie cît mai mare cu putință. În faza inițială, este judicios ca în fibra inferioară să fie atins efortul unitar σ^*_{bi}, cu valoarea maximă pe care o permite calitatea betonului în momentul transferului. Urmează că efortul unitar ce nu poate fi egalat în situația considerată este σ^*_{bs}. Diagrama inițială de eforturi devine $D°$ (fig. 5.12), ea caracterizîndu-se prin existența în fibra superioară a efortului unitar :

$$\sigma^0_{bs} > \sigma^*_{bs} \tag{5.64}$$

b) **Relații de calcul**

În calculele și raționamentele ce urmează vom nota cu t deplasarea centrului de greutate față de poziția stabilită anterior. Remarcăm faptul că în general acesta urcă ($t>0$) dacă $z>z_1$ și coboară ($t<0$) dacă $z<z_1$, situație în care $\sigma^0_{bs}<\sigma^*_{bs}$.

Presupunînd că este respectată relația (5.64), convenim să notăm cu simbolul (°) caracteristicile geometrice și mecanice după schimbarea poziției centrului de greutate. Din relația (5.34) se deduce :

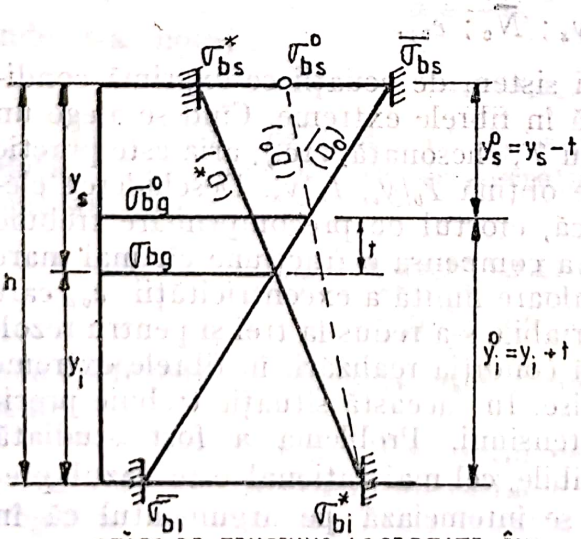


Fig. 5.12

$$M_g = \Delta\sigma_i \frac{I_b}{y_i} = \Delta\sigma_i \left(\frac{I_b}{y_i}\right)^0$$

De aici rezultă :

$$\frac{I_b}{y_i} = \frac{I^0_b}{y^0_i} = \frac{I^0_b}{y_i + t}$$

Se obține :

$$I^0_b = I_b \frac{y_i + t}{y_i} \quad \text{sau} \quad I^0_b = I_b + tW_i \tag{5.65}$$

Pentru a determina noua poziție a centrului de greutate în conformitate cu relația (5.65) trebuie mărită aria tălpii superioare cu cantitatea ΔA_s și micșorată aria tălpii inferioare cu cantitatea ΔA_i, între cele două mărimi existînd re-

ția $\Delta A_s > \Delta A_i$. Modificările ce intervin în distribuția materialului pe secțiune în urma schimbării poziției centrului de greutate devin mai evidente pe măsură ce momentul încovoietor M_g are valori mai ridicate față de momentul M_q. Cu cît raportul Ψ dintre cele două mărimi este mai mare, centrul de greutate trebuie deplasat mai mult spre fibra extremă comprimată și secțiunea tinde să devină un T, în urma creșterii tălpii superioare și micșorării celei inferioare. Calculul distanței t se face din condiția ca pe secțiunea ce a rezultat în urma modificărilor intervenite în distribuția maselor, diferența Δ° dintre brațul cuplului inferior z° și deplasarea disponibilă a efortului de precomprimare z_1^0 să fie nulă, adică :

$$\Delta^\circ = z^\circ - z_1^0 = z^\circ - y_i^0 + d_p + k_i^0 = 0 \tag{5.66}$$

Deoarece momentul produs de greutatea proprie este direct proporțional cu aria secțiunii, se poate scrie :

$$\Delta^\circ = z^\circ - z_1 \tag{5.67}$$

Dar : $\frac{M_g}{\bar{N}_0} = \frac{M_g}{A_b \sigma_{bg}} = z$ de unde se deduce : $\frac{M_g}{A_b} = z\sigma_{bg}$ și relația (5.67) devine :

$$z^\circ = z\sigma_{bg} \frac{A_b^0}{(\bar{N}^\circ)^0} \tag{5.68}$$

Întrucît $\bar{N}_0 = A_b^0 \sigma_{bg}^0$, rezultă :

$$z^\circ = z \frac{\sigma_{bg}}{\sigma_{bg}^0} \tag{5.69}$$

Din analiza stărilor de tensiuni prezentate în fig. 5.12 se deduce

$$\sigma_{bg}^0 = \sigma_{bg} + \frac{t}{h}(\bar{\sigma}_{bs} - \bar{\sigma}_{bi}) \tag{5.70}$$

Considerînd că în fibrele extreme eforturile unitare ating valorile admisibile și notînd : $j = \frac{\sigma_{bs,a} - \sigma_{bi,a}}{h}$

se obține :

$$\sigma_{bg}^0 = \sigma_{bg} + tj \tag{5.71}$$

Ceilalți termeni ai relației (5.66) au următoarele semnificații :

$$y_i^0 = y_i + t \; ; \; k_i^0 = \left(\frac{i^2}{y_i}\right)^\circ \cdot \left(\frac{\sigma_{bi,s}^*}{\sigma_{bg}} - 1\right)$$

Se observă că mărimile A_b și A_b^0 au valori apropiate ($A_b^0 - A_b = \Delta A_s - A\Delta_i$) și în mod aproximativ se admite că $A_b / A_b^0 = 1$, ceea ce conduce la :

$$k_i^0 = \frac{i^2}{y_i}\left(\frac{\sigma_{bi,a}^*}{\sigma_{bg}^0} - 1\right)$$

Înlocuind în relația (5.66) pe z^0, y_i^0 și k_i^0 cu expresiile determinate mai sus, se obține :

$$z \cdot \frac{\sigma_{bg}}{\sigma_{bg}^b} - y_i - t + \frac{i^2}{y_i}\left(\frac{\sigma_{bi,a}^*}{\sigma_{bg}^0} - 1\right) + d_p = 0 \tag{5.72}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, după prelucrări :

$$\sigma_{bg}\left\{\left[z-y_i+\frac{i^2}{y_i}\left(\frac{\sigma^*_{bi,a}}{\sigma_{bg}}-1\right)+d_p\right]-tj\left(y_i+\frac{\sigma_{bg}}{j}+\frac{i^2}{y_i}-d_p\right)-t_j^2\right\}=0 \qquad (5.73)$$

Dacă se notează :

$$A=z-y_i+\frac{i^2}{y_i}\left(\frac{\sigma^*_{bi,a}}{\sigma_{bg}}-1\right)+d_p\,;\quad B=\frac{1}{2}\left[y_i+U+\frac{i^2}{y_i}-d_p\right]$$

unde :

$$U=\frac{\sigma_{bg}}{j}=\frac{\sigma_{bg}}{\sigma_{bs,a}-\sigma_{bt,a}}\cdot h$$

relația (5.73) devine

$$\sigma_{bg}A-2jBt-jt^2=0$$

și înlocuind $\sigma_{bg}=U\cdot j$, după ordonare se obține ecuația :

$$t^2+2Bt-UA=0 \qquad (5.74)$$

ale cărei soluții sînt :

$$t=-B\pm\sqrt{B^2+UA} \qquad (5.75)$$

Dar, t are valori reale numai dacă este îndeplinită condiția :

$$B^2+UA=0$$

Rezultă de aici o restricție impusă poziției centrului de greutate al armăturii. Înlocuind pe A și B cu expresiile de mai sus și rezolvînd o ecuație de gradul doi în d_p, se obține :

$$d_p\geqslant P\pm\sqrt{P^2-Q^2} \qquad (5.76)$$

unde

$$P=y_i+r_s-U\,;\quad Q=y_i^2+r_s^2+U^2+2(y_ir_s+r_sU-y_iU)+4U(z+K_i)\,;$$

$$r_s=\frac{i^2}{y_i}\,;\quad K_i=\frac{i^2}{y_i^2}\left(\frac{\sigma^*_{bi}}{\sigma_{bg}}-1\right)$$

Fiind cunoscută noua poziție a centrului de greutate, este posibil să se determine cantitățile ΔA_s și ΔA_i cu care se modifică ariile tălpilor.

Dacă se ține cont de schimbările ce se produc în distribuția maselor pe secțiune datorită deplasării centrului de greutate și se face aproximația $\Delta I\simeq tW$, relațiile (5.43) se prezintă sub forma :

IV
$$\begin{cases} (A_s+\Delta A_s)(y_s-t-0{,}5h_s)-(A_i-\Delta A_i)(y_i+t-0{,}5h_i)= \\ =0{,}5bh(y_i-y_s+2t)+bh_s(y_s-t-0{,}5h_s)-bh_i(y_i+t-0{,}5h_i) \end{cases} \qquad (5.77)$$

$$\begin{cases} (A_s+\Delta A_s)\left[(y_s-t-0{,}5h_s)^2+\frac{h_s^2}{12}\right]+(A_i-\Delta A_i)\left[(y_i+t-0{,}5h_i)^2+\frac{h_i^2}{12}\right]= \\ =I_b+W_it-\frac{b}{3}[(y_s-t)^3+(y_i+t)^3]+bh_s(y_s-t-0{,}5h_s)^2+bh_i(y_i+ \\ +t-0{,}5h_i)^2+\frac{b}{12}(h_i^3+h_5^3) \end{cases} \qquad (5.78)$$

Grupînd în mod convenabil termenii, ecuațiile sistemului (IV) devin :

$$V\begin{cases} A_s(y-0{,}5h_s)-A_i(y_i-0{,}5h_i)+\Delta A_s(y_s-0{,}5h_s-t)+\Delta A_i(y_i-0{,}5h_i+t)= \\ =0{,}5bh(y_i-y_s)+bh_s(y_s-0{,}5h_s)-bh_i(y_i-0{,}5h_i)+[bh+ \\ +A_s+A_i-b(h_s+h_i)]t \end{cases} \quad (5.79)$$

$$\begin{cases} A_s[(y_s-0{,}5h_s)^2+h_s^2/12]+A_i[(y_i-0{,}5h_i)^2+h_i^2/12]+\Delta A_s[(y_s-0{,}5h_s-t)^2+ \\ +h_s^2/12]-\Delta A_i[(y_i+t-0{,}5h_i)^2+h_i^2/12]=I_b-b(y_i^3+y_s^3)/3+ \\ +bh_s(y_s-0{,}5)+bh_i(y_i-0{,}5h_i)^2+b(h_i^3+h_s^3)/12+2[A_s(y_s-0{,}5h_s)- \\ -A_i(y_i-0{,}5h)_i-0{,}5bh(y_i-y_s)-bh_s(y_s-0{,}5h_s)+bh_i(y_i-0{,}5h_i)]t \\ -[bh+A_s+A_i-b(h_s+h_i)]t^2+tW_i \end{cases} \quad (5.80)$$

Observăm că :

$$bh+A_s+A_i-b(h_s+h_i)=A_b$$

$$A_s(y_s-0{,}5h_s)-A_i(y_i-0{,}5h_i)-0{,}5bh(y_i-y_s)-bh_s(y_s-0{,}5h_s)+bh_i(y_i-0{,}5h_i)=0$$

și scăzînd ecuația (5.44) din (5.78) și (5.79) se obține :

$$VI\begin{cases} \Delta A_s(y_s-0{,}5h_s-t)+\Delta A_i(y_i-0{,}5h_i+t)=tA_b & (5.81) \\ \Delta A_s[(y_s-0{,}5h_s-t)^2+h_s^2/12]-\Delta A_i[(y_i-0{,}5h_i+t)^2+h_i^2/12]=t(W_i-tA_b) & (5.82) \end{cases}$$

Rezultă că :

$$\Delta A_s=D_s/D_t\ ;\ \Delta A_i=D_i/D_t \quad (5.83)$$

unde D_t, D_s, D_i au următoarele semnificații :

$$D_t=(a_sh-a_s-t)[(a_ih-a_i+t)^2+a_i^2/3]+(a_ih-a_i+t)[(a_sh-a_s-t)^2+a_s^2/3]$$

$$D_s=[(a_ih-a_i+t)^2+a_i^2/3](W_i-tA_b)t+(a_ih-a_i+t)tA_b$$

$$D_i=[(a_sh-a_s-t)^2+a_s^2/3]tA_b-(a_sh-a_s-t)(W_i-tA_b)t$$

Ariile tălpilor în această situație devin :

$$A_s^0=A_s+\Delta A_s\ ;\ A_i^0=A_i-\Delta A_i \quad (5.84)$$

iar aria totală :

$$A_b^0=A_b+\Delta A_s-\Delta A_i \quad (5.85)$$

Păstrînd constante înălțimile tălpilor, se deduc lățimile corespunzătoare :

$$b_s^0=\frac{A_s}{h_s}\ ;\quad b_i^0=\frac{A_i}{h_i}$$

Modificarea poziției centrului de greutate determină schimbarea caracteristicilor geometrice și mecanice ale secțiunii :

$$y_s^0=y_s-t\ ;\ y_i^0=y_i+t\ ;\ I_b^0=I_b+tW_i\ ;\ W_i^0=I_b^0/y_i^0=W_i\ ;\ W_s^0=I_b^0/y_s^0$$

$$r_s^0=W_i/A_b^0\ ;\ K_s^0=r_i^2(\bar{\sigma}_{bs}/\sigma_{bg}^0-1)\ ;\ \sigma_{bg}^0=\sigma_{bg}+\frac{t}{h}(\bar{\sigma}_{bs}-\bar{\sigma}_{bi})$$

$$r_i^0=W_s^0/A_b^0\ ;\ K_i^0=r_j^0(\sigma_{bi,a}^*/\sigma_{bg}^0-1)$$

Se determină în continuare efortul de precomprimare în faza finală :

$$(\bar{N}_0)^0 = A_b \sigma^0_{bg} \quad \text{rezultînd} \quad A^0_p = \frac{(\bar{N}_0)^0}{\bar{\sigma}_{p0}}$$

În faza inițială se deduce :

$$(N_0)^0 = \frac{(\bar{N}_0)^0}{1-\varphi}$$

Corectitudinea calculelor se verifică cu relația :

$$(\bar{N}_0)^0 = \frac{M_q}{K_i + K_s}$$

Pentru control ,se poate calcula deasemeni ;

$$\Delta^0 = z^0 - z^0_1 = 0$$

deoarece acum se cunosc atît z^0 cît și z^0_1. Prin modificările intervenite în geometria secțiunii s-a schimbat valoarea momentului produs de greutatea proprie, care acum este :

$$M^0_g = \frac{g^0 l^2}{8} \quad \text{unde} \quad g^0 = A^0_b \gamma_b$$

În consecință se modifică și mărimea eforturilor unitare fictive $\sigma^*_{bi,d}$ și $\sigma^*_{bs,d}$ ca urmare a schimbării raportului dintre M_g și M_q(ψ devine $\psi^0 = M^0_g/M_q$). Aceste variații au însă o influență cu totul neînsemnată asupra poziției centrului de greutate și a eventualelor corecții ce ar putea fi aduse tălpilor, motiv pentru care se neglijează. În final, este necesar să se cerceteze dacă elementul în noua alcătuire reprezintă o soluție constructivă economică ($0{,}45 \leqslant \rho \leqslant 0{,}55$) și dacă pierderile de tensiuni reale înregistrate în faza finală sînt apropiate de cele estimate la începutul calculului.

5.4 Dimensionarea optimă a grinzilor precomprimate

5.4.1. Relații de calcul cînd axa neutră trece prin nervură ($x > h_s$).

a) **Secțiune în formă de dublu T nesimetric** (fig. 5.13)

Dacă coeficientul condițiilor de lucru al armăturii pretensionate, m_p, are valoarea precizată din ecuația de proiecție a forțelor

$$[bx + (b_p - b)h_s]R_c = A_p \sigma_{pi} \tag{5.86}$$

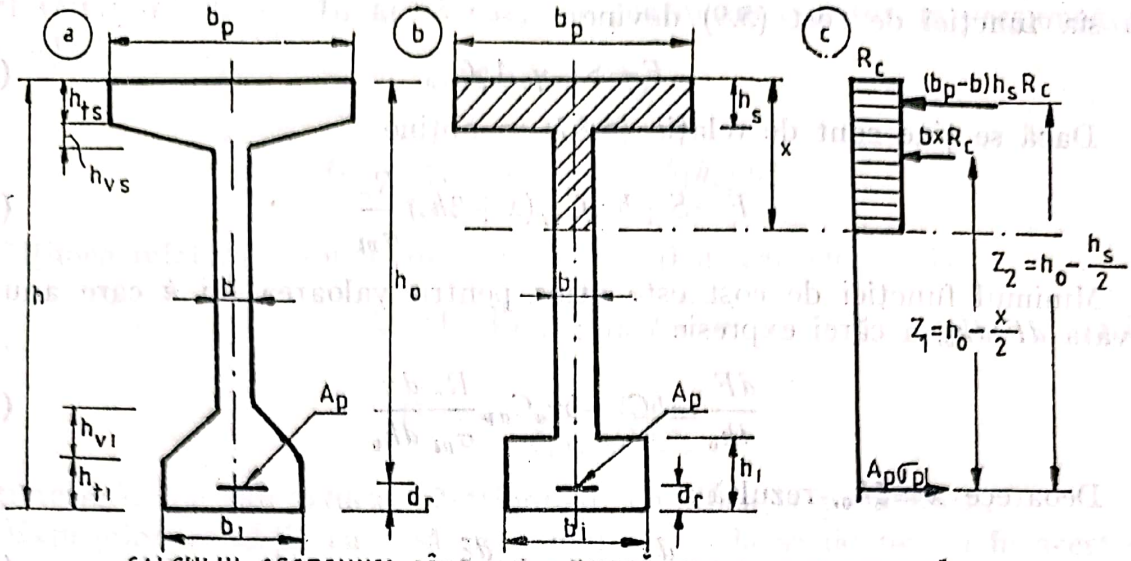
se deduce aria secțiunii de armătură activă

$$A_p = b(X + \beta h_s)\frac{R_c}{\sigma_{pi}} \tag{5.87}$$

unde $\beta = b_p/b - 1$

Ecuația de echilibru de momente, scrisă în raport cu centrul de greutate al armăturii active :

$$M = 0{,}85[bx(h_0 - 0{,}5x) + (b_p - b)h_s(h_0 - 0{,}5h_s)]R_c \tag{5.88}$$



CALCULUL SECȚIUNII CÎND AXA NEUTRĂ TRECE PRIN NERVURĂ:
a. secțiunea reală; b. secțiunea schematizată; c stări de tensiuni

Fig. 5.13

permite determinarea înălțimii relative a zonei comprimate, care are expresia :

$$\xi=1-\sqrt{1-\frac{M}{0{,}425bh_0^2R_c}+\frac{2\beta h_s}{h_0}-\frac{\beta h_s^2}{h_0^2}} \tag{5.89}$$

Deoarece momentul încovoietor în secțiunea mediană poate fi exprimat sub forma :

$$M=G+Ch_0$$

unde :

$$G=\frac{l^2}{8}\{q+[bd_r+(b_s-b)h_s+(b_i-b)h_i]\gamma_b\};\quad C=\frac{l^2b\gamma_b}{8}$$

relația (5.89) se transformă în :

$$\xi=1-\sqrt{D-E+P-R} \tag{5.90}$$

termenii de sub radical avînd următoarele semnificații :

$$D=1-\frac{G}{0{,}425bh_0^2R_c};\quad E=\frac{C}{0{,}425bh_0R_c};\quad P=\frac{2\beta h_s}{h_0^2};\quad R=\frac{\beta h_s^2}{h_0^2}$$

Pentru ca ξ să fie o mărime reală, este necesar ca :

$$D-E+P-R\geqslant 0$$

De aici rezultă la limită valoarea minimă a înălțimii utile, egală cu :

$$h_{0\,\lim}=\left(\frac{C}{0{,}85bR_c}+\beta h_s\right)\pm\sqrt{\left(\frac{C}{0{,}85bR_c}-\beta h_s\right)^2+\frac{2(G+0{,}425\beta bh_s^2R_c)}{0{,}85bR_c}} \tag{5.91}$$

Notînd cu : $S=[b(h_0+d_r)+(b_s-b)h_s+(b_i-b)h_i]C_b+P_a/l$

expresia funcției de cost (5.9) devine :

$$F=S+\gamma_a A_p C_{ap} \tag{5.92}$$

Dacă se ține cont de relația (5.87) se obține

$$F=S+b\gamma_a C_{ap}(x+\beta h_s)\frac{R_c}{\sigma_{pl}} \tag{5.93}$$

Minimul funcției de cost este atins pentru valoarea lui h care anulează derivata dF/dh_0, a cărei expresie este :

$$\frac{dF}{dh_0}=bC_b+b\gamma_a C_{ap}\frac{R_c}{\sigma_{pl}}\frac{dx}{dh_0} \tag{5.94}$$

Deoarece $x=\xi h_0$, rezultă :

$$\frac{dx}{dh_0}=\xi+h_0\frac{d\xi}{dh_0} \tag{5.95}$$

Ținînd cont de relațiile (5.90) și (5.95) se obține :

$$\frac{dx}{dh_0}=1-\frac{1}{\sqrt{D-E+P-R}}(1-0{,}5E+0{,}5P) \tag{5.96}$$

Introducînd expresia lui dx/dh_0 în relația (5.94) și egalînd cu zero, după ordonarea termenilor se găsește :

$$\frac{C_b}{\gamma_a C_{ap}}+\frac{R_c}{\sigma_{pl}}=\frac{R_c}{\sigma_{pl}}\left(\frac{1-0{,}5E+0{,}5P)}{\sqrt{D-E+P-R}}\right) \tag{5.97}$$

Dacă se notează :

$$\alpha=\frac{C_b}{\gamma_a C_{ap}} \quad \text{și} \quad \omega=\frac{\alpha+R_c/\sigma_{pl}}{R_c/\sigma_{pl}}$$

se obține ecuația :

$$\omega^2(D-E+P-R)=(1-0{,}5E+0{,}5P)^2 \tag{5.98}$$

Exprimînd termenii D, E, P și R în funcție de caracteristicile geometrice și mecanice ale secțiunii, grupînd termenii și făcînd notațiile :

$$U=0{,}85^2b^2R_c^2(\omega^2-1)\ ;\ V=(1{,}7bCR_c-2x0{,}85^2\beta b^2h_sR_c)(\omega^2-1)\ ;$$

$$\overline{W}=1{,}7bGR_c\omega^2+0{,}85^2\beta b^2h_s^2R_c^2(\omega^2+\beta)-1{,}7\beta bh_sCR_c+C^2$$

ecuația (5.98) devine :

$$Uh_{0e}^2-Vh_{0e}-\overline{W}=0 \tag{5.99}$$

soluția ei fiind :

$$h_{0e}=\frac{V\pm\sqrt{V^2+4U\overline{W}}}{2U} \tag{5.100}$$

b) **Secțiunea în formă de T**

Pentru secțiunea în formă de T, relațiile deduse mai sus se modifică ca urmare a faptului că în evaluarea ariei și a greutății proprii nu mai intervine

efectul tălpii inferioare. În acest caz, momentul încovoietor în secțiunea mediană este :

$$M=G_1+Ch_0$$

unde :

$$G=\frac{l^2}{8}\{g+[bd_r+(b_s-b)h_s]\gamma_b\}$$

iar înălțimea relativă a zonei comprimate se calculează cu relația :

$$\xi_1=1-\sqrt{D_1-E+P-R} \tag{5.101}$$

unde :

$$D_1=1-\frac{G_1}{0{,}425bh_0^2R_c}$$

ceilalți termeni de sub radical păstrîndu-și semnificația prezentată.

Exprimînd condiția ca ξ să fie o mărime reală se deduce și în acest caz, relația de calcul a înălțimii utile limită :

$$h_{0_{\text{lim}}}^{(1)}=\left(\frac{C}{0{,}85bR_c}-\beta h_s\right)\pm\sqrt{\left(\frac{C}{0{,}85R_c}-\beta h_s\right)^2+\frac{2(G_1+0{,}425\beta bh_s^2R_c)}{0{,}85bR_c}} \tag{5.102}$$

Expresia funcției de cost devine :

$$F_1=S_1+b\gamma_aC_{ap}(X+\beta h_s)\frac{R_c}{\sigma_{pl}} \tag{5.103}$$

unde s-a notat :

$$S_1=[b(h_0+d_r)+(b_s-b)h_s]C_b+P_a/l$$

Înălțimea utilă economică se obține anulînd derivata funcției de cost în raport cu variabila considerată. Se obține în final expresia :

$$h_{0e}^{(1)}=\frac{V\pm\sqrt{V^2+4VW_1}}{2U} \tag{5.104}$$

unde :

$$W_1=1{,}7bG_1R_c\omega^2+0{,}85^2\beta h_s^2b^2R_c^2(\omega^2+\beta)-1{,}7\beta bh_sCR_c+C^2$$

5.4.2. Relații de calcul cînd axa neutră trece prin placă

a) **Secțiuni în formă de dublu T nesimetric** (5.14)

Din ecuația de echilibru de forțe scrisă pentru starea limită de rezistență :

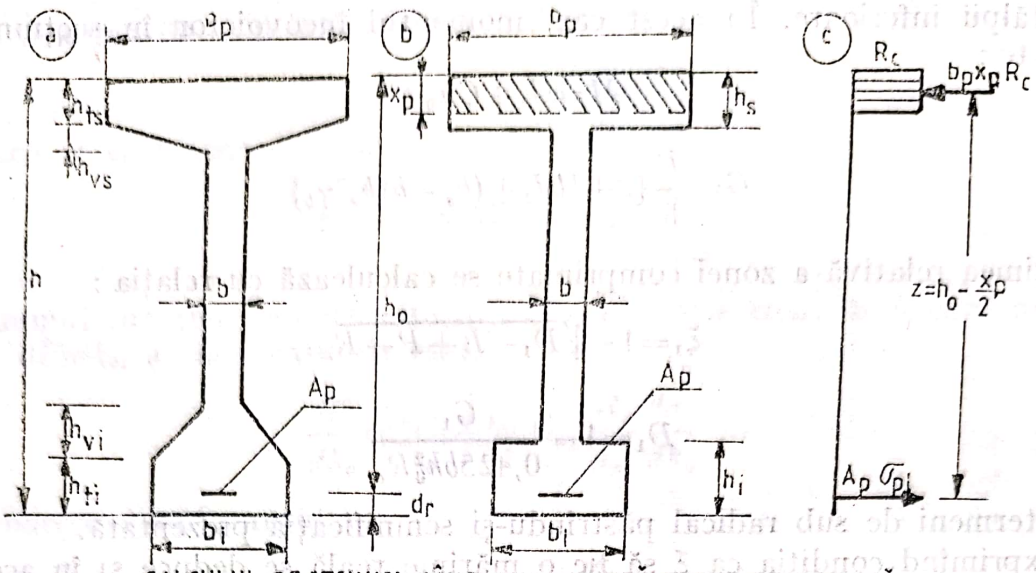
$$b_pX_pR_c=A_p\sigma_{pl} \tag{5.105}$$

se determină secțiunea armăturii active :

$$A_p=\frac{b_pX_pR_c}{\sigma_{pl}} \tag{5.106}$$

Din ecuația de echilibru de momente în raport cu centrul de greutate al armăturii :

$$M=0{,}85b_pX_p(h_0-0{,}5X_p)R_c \tag{5.107}$$



CALCULUL SECȚIUNII CÎND AXA NEUTRĂ TRECE PRIN PLACĂ:
a. secțiunea reală; b. secțiunea schematizată; c. stări de tensiune.

Fig. 5.14

se deduce înălțimea relativă a zonei comprimate:

$$\xi_p = 1 - \sqrt{1 - \frac{M}{0{,}425 b_p h_0^2 R_c}} \tag{5.108}$$

Ținînd cont de faptul că momentul încovoietor într-o secțiune variază liniar în funcție de înălțimea acesteia, deci:

$$M = G + Ch_0$$

relația (5.108) se transformă în:

$$\xi_p = 1 - \sqrt{D_p - T_p} \tag{5.109}$$

în care s-a notat:

$$D_p = 1 - \frac{G}{0{,}425 b_p h_0^2 R_c}; \quad T_p = \frac{C}{0{,}425 b_p h_0 R_c}$$

Impunînd condiția ca să ξ fie o mărime reală:

$$D_p - T_p \geq 0$$

rezultă la limită:

$$h_{0,\lim}^{(p)} = \frac{C}{0{,}85 b_p h_c} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{0{,}85 b_p R_c}\right)^2 + \frac{2G}{0{,}85 b_p R_c}} \tag{5.110}$$

Dacă se ține cont de relația (5.105), funcția de cost se exprimă sub forma:

$$F = S + b_p \gamma_a C_{ap} X_p \frac{R_c}{\sigma_{pe}} \tag{5.111}$$

Această funcție prezintă un minim pentru valoarea lui h care anulează derivata:

$$\frac{dF}{dh_0} = bC_b + b_p \gamma_a C_{ap} \frac{R_c}{\sigma_{pl}} \cdot \frac{dX_p}{dh_0} \tag{5.112}$$

Întrucît $x_p=\xi_p h_0$, rezultă :

$$\frac{dx_p}{dh_0}=\xi_p+h_0\frac{d\xi_p}{dh_0} \tag{5.113}$$

Ținînd cont de relațiile (5.109) și (5.113) se obține :

$$\frac{dx_p}{dh_0}=1-\frac{1}{\sqrt{D_p-T_p}}\,[1-0{,}5T_p] \tag{5.114}$$

Introducînd expresia de mai sus în relația (5.112) și egalînd cu zero se găsește :

$$\frac{bC_b}{b_p\gamma_a C_{ap}}+\frac{R_c}{\sigma_{pl}}=\frac{R_c}{\sigma_{pl}}\left(\frac{1-0{,}5E_p}{\sqrt{D_p-E_p}}\right) \tag{5.115}$$

Dacă se notează :

$$\alpha_p=\frac{bC_p}{b_p\gamma_a C_{ap}} \qquad \text{și} \qquad \mathbf{R}_p=\frac{\alpha_p+R_c/\sigma_{pl}}{R_c/\sigma_{pl}}$$

rezultă ecuația :

$$\omega_p^2(D_p-E_p)=(1-0{,}5E_p)^2 \tag{5.116}$$

Exprimînd termenii D_p și T_p în funcție de caracteristicile geometrice și mecanice ale secțiunii, ordonînd termenii și făcînd notațiile :

$$U_p=0{,}85^2 b_p^2 R_c^2(\omega_p^2-1)\;;\quad V_p=1{,}7b_pCR_c(\omega_p^2-1)\;;\quad W_p=1{,}7b_pGR_c\omega_R^2$$

se obține ecuația :

$$U_p h_{oe}^2-V_p h_{oe}-W_p=0 \tag{5.117}$$

a cărei soluție este :

$$h_{oe}^{(p)}=\frac{V_p\pm\sqrt{V_p^2+4V_pW_p}}{2U_p} \tag{5.118}$$

b) **Secțiune în formă de T**

Ca urmare a dispariției tălpii inferioare unii termeni utilizați mai înainte se modifică. Din acest motiv relația de calcul a înălțimii relative se transformă în:

$$\xi_{p1}=1-\sqrt{D_{p1}-T_p} \quad \text{unde :}\quad D_{p1}=1-\frac{G_1}{0{,}425b_ph_0^2R_c} \tag{5.119}$$

Înălțimea utilă limită se exprimă sub forma :

$$h_{0,\lim}^{(p)}=\frac{C}{0{,}85b_pR_c}\pm\sqrt{\left(\frac{C}{0{,}85b_pR_c}\right)^2+\frac{2G_1}{0\,85b_pR_c}} \tag{5.120}$$

Expresia funcției de cost devine :

$$F_{p1}=S_1+b_p\gamma_a C_{dp}x_p\frac{R_c}{\sigma_{pl}} \tag{5.121}$$

iar înălțimea utilă economică se calculează cu relația :

$$h_{oe}^{(p)}=V_p\pm\frac{\sqrt{V_p^2+4V_pW_{p1}}}{2U_1} \quad \text{unde :}\quad W_{p1}=1{,}7\,b_pG_1R_c\omega_p^2 \tag{5.122}$$

5.5 Concluzii și propuneri de proiectare

5.5.1. Considerații privind calculul în domeniul elastic

Programul OPTIGEL a fost utilizat în scopul de a evidenția influența pe care unii parametri de proiectare o exercită asupra formei și economicității secțiunii elementelor încovoiate din beton precomprimat. În acest caz s-au efectuat două aplicații calculîndu-se o grindă cu deschiderea de 12 m. (G_{12}) și alta cu deschiderea de 21 m (G_{21}) elemente ce sînt situate prin gabaritul lor în apropierea limitelor domeniului de utilizare. Concluziile prezentate concis sub forma de grafice și tabele au rezultat în urma prelucrării datelor obținute pentru 170 variante de proiectare. Variabile ale problemei de optimizare au fost considerate stările de tensiuni din secțiunea de moment maxim în fazele inițială și finală. Domeniul lor de variație este parcurs prin valori discrete care s-au ales astfel încît să fie îndeplinite condițiile de calitate impuse elementelor ce fac parte din clasa 1 de fisurabilitate.

S-au luat în considerare următoarele eforturi unitare admisibile :

— la transfer

în fibra inferioară : $\sigma_{bi}=21$ N/mm²

în fibra superioară : $\sigma_{bs}=-1{,}75$; 0 și 1 N/mm²

— în exploatare

în fibra inferioară : $\overline{\sigma}_{bi}=0$ și 1 N/mm²

în fibra superioară : $\overline{\sigma}_{bs}=10$ și 14 N/mm²

Din acest cîmp de valori se pot forma 12 combinații, a cîte patru eforturi unitare fiecare. O grupare de tensiuni caracterizează comportarea secțiunii sub încărcări, atît la transfer cît și în exploatare. Din analiza rezultatelor obținute se constată că, stările de tensiuni admise în fibrele extreme ale secțiunii nu exercită o influență deosebită asupra valorii optime a înălțimii. Astfel, în cazul grinzii G_{12}, pentru cele 12 combinații posibile, înălțimea optimă, h_{opt}, ia valori în intervalul 1,60...1,75, ceea ce corespunde unei domeniu de variație a raportului $h_s/l=1/7{,}3...1/6{,}9$.

Pentru grinda cu deschiderea de 21 m, înălțimea optimă variază, în funcție de stările de tensiuni admise, în intervalul 2,80...2,92 m, ceea ce corespunde raportului $h_{opt}/l=1/7{,}2...1/7{,}45$. Rezultă că, în domeniul elastic de comportare (caracterizat prin stări de tensiuni proprii clasei 1 de fisurabilitate), înălțimea optimă reprezintă aproximativ 1/7 din deschidere, indiferent de mărimea acesteia. Înălțimea optimă conduce la soluții constructive care necesită consumurile cele mai scăzute de beton și armătură. Aceasta însă nu poate fi utilizată în practică, deoarece elementul rezultă prea zvelt, cu tălpi puțin dezvoltate și nu asigură condiții corespunzătoare de rezemare a elementelor de acoperiș. Grinzile avînd o suplețe avansată, cresc înălțimea totală a construcției, ceea ce determină sporirea în măsură însemnată a cheltuielilor de exploatare (încălzire, iluminare, ventilare). Se observă că, rezultatele calculului de optimizare a secțiunii transversale nu sînt în concordanță cu cerințele ce decurg dintr-o exploatare rațională a elementului sau a structurii în ansamblu. Pentru a stabili condițiile în care se armonizează exigențele funcționale și cele economice s-au cercetat consecințele ce decurg din micșorarea înălțimii. Pornind de la valoarea optimă a acestui parametru s-au analizat diferite variante de alcătuire a secțiunii transversale ce se obțin prin reducerea treptată a înălțimii pînă la valori ce corespund unui raport h/l=1/20, considerat ca limită inferioară pentru astfel de elemente,

Scanned with OKEN Scanner

Sînt prezentate și comentate consecințele pe care le determină variația înălțimii asupra costului unitar, a randamentului ρ, a simentriei, a raportului ψ dintre solicitarea permanentă și cea temporară, a cantității de armătură activă.

În paralel sînt analizate și consecințele ce decurg din modificarea stării de tensiuni din fibra superioară la transfer și în exploatare și în fibra inferioară în exploatare. Studiul variației funcției de cost în raport cu înălțimea (fig. 5.15 ; 5.16 ; 5.17) arată că indiferent de valoarea eforturilor unitare admise și de mărimea deschiderii, costul crește continuu pe măsură ce înălțimea se reduce. Pentru valori ale acesteia mai mici decît 1/13...1/15 din deschidere panta curbei de variație $F=f(h/l)$ crește brusc indicînd o sporire accentuată a costurilor unitare. Creșterea în sens algebric al efortului unitar în fibra superioară la transfer, σ_{bs}, exercită o influență nefavorabilă asupra costului elementului (fig. 5.15). Ea se accentuează pe măsură ce raportul h/l se reduce. Această observație este valabilă și în privința efortului unitar în fibra inferioară în exploatare (fig. 5.14). Creșterea efortului unitar în fibra inferioară în exploatare are un efect contrar.

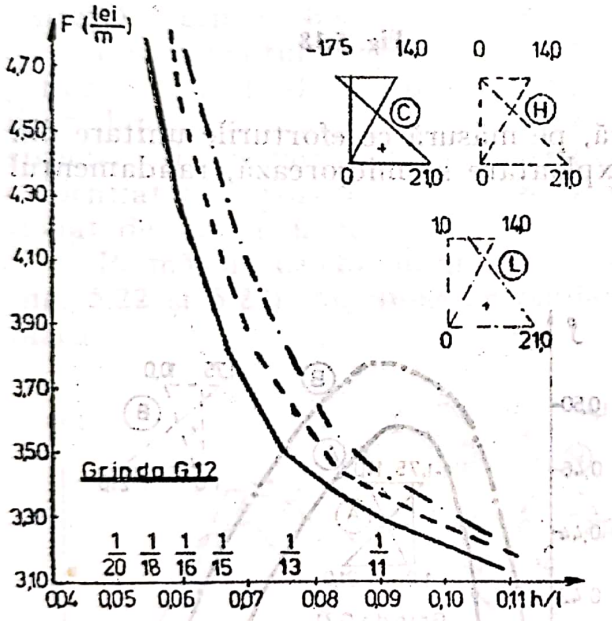


Fig. 5.15

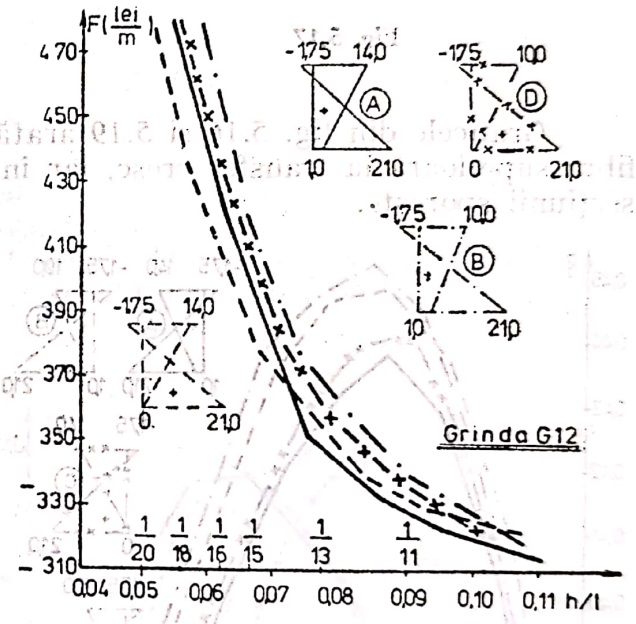


Fig. 5.16

Diagramele *A* și *B* din fig. 5.16 și 5.17 arată că sporirea lui $\bar{\sigma}_{bs}$ de la 10 N/mm² la 14 N/mm² conduce la o micșorare a costului unitar, atunci cînd $h/l=1/13$, cu aproximativ 5%. Evidențierea modului în care parametrii de proiectare luați în considerare influențează randamentul secțiunii (un indicator ușor mînuit, dar eficient în aprecierea economicității de ansamblu a elementelor) prezintă un interes deosebit în practică. În urma prelucrării datelor se constată că randamentul variază în funcție de nivelul de solicitare și de tipul elementului. Valorile maxime ale randamentului se obțin pentru domenii restrînse ale înălțimii, poziția acestora fiind condiționată de mărimea deschiderii grinzii. Pentru grinda G_{12}, în funcție de stările de tensiuni acceptate, randamentul înregistrează valori maxime de 0,44...0,45 la înălțimi situate în intervalul $h=(1/13...1/15)\,l$ (fig. 5.18).

În cazul elementului G_{21} se obțin valori maxime ale lui ρ de 0,47...0,50 pentru înălțimi ce corespund unui raport $h/l=(1/14...1/16)$ (fig. 5.20).

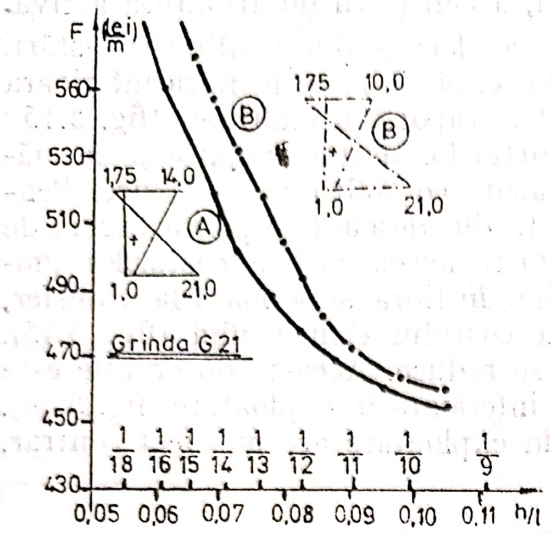


Fig. 5.17

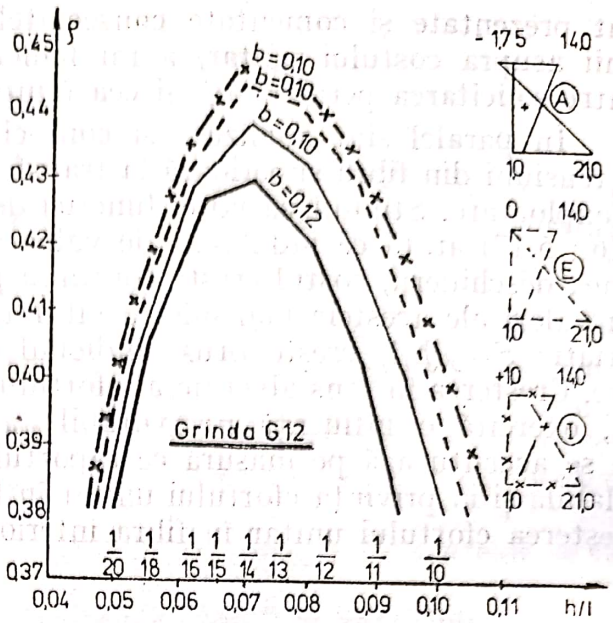


Fig. 5.18

Graficele din fig. 5.16 și 5.19 arată că, pe măsură ce eforturile unitare din fibra superioară la transfer cresc, iar în exploatare se micșorează, randamentul secțiunii sporește.

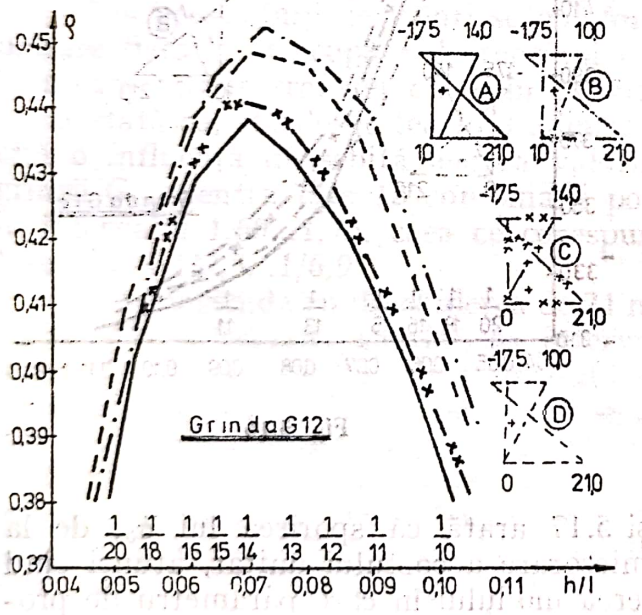


Fig. 5.19

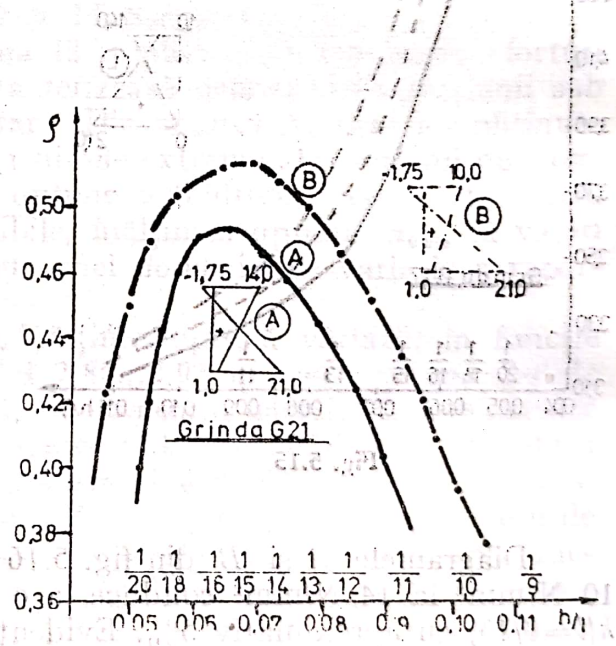


Fig. 5.20

Scăderea randamentului sub anumite limite, ca urmare a realizării în exploatare a unei stări avansate de comprimare a betonului în zona superioară a elementului, este însoțită de creșterea greutății proprii și a consumului de oțel, precum și de înrăutățirea generală a formei și caracteristicilor secțiunii. În contrast cu cele arătate mai sus, la starea limită de rezistență este necesar să se asigure betonului o rezistență la compresiune cît mai ridicată.

Cercetarea stărilor de tensiuni pentru diferite grinzi tipizate a evidențiat faptul că în condițiile unei exploatări normale, eforturile unitare $\bar{\sigma}_{bs}$ nu depășesc

în mod obișnuit valoarea de 10...12 N/mm². Această constatare, rezultată dintr-o practică îndelungată de proiectare, corelată cu concluziile cercetării întreprinse conduc la ideea reanalizării concepției actuale privind limitarea eforturilor unitare în betonul comprimat și a modului de utilizare rațională a rezervelor de rezistență pe care acest material le posedă.

Se sugerează în acest sens revizuirea prevederii din normativ privind verificarea la închiderea fisurilor normale în fibra superioară în exploatare și care constă în limitarea efortului unitar normal sub acțiunea încărcărilor de scurtă durată ($\sigma_{bs} \leqslant 0{,}8 R_c$). Valoarea $0{,}8\,R_c$, rezultată din condiția evitării apariției deformațiilor neelastice în betonul comprimat este acoperitoare. Adoptarea unei valori mai reduse poate fi justificată din considerente economice și conduce la o corelare mai bună între prescripțiile de calcul și rezultatele obținute în practica de proiectare. Deoarece prin sporirea mărcii betonului prețul unitar al materialului crește în măsură mai mare decît R_c, pentru a obține o valorificare integrală a rezervelor de rezistență de care dispune betonul (atît în exploatare cît și în faza de rupere) este important să se analizeze și să se stabilească condițiile în care este posibil să se folosească în talpa superioară (mai ales în zona centrală a grinzii) betoane de mărci mai reduse decît restul elementului.

Randamentul secțiunii variază direct proporțional cu lățimea tălpii superioare. Dorința de a realiza secțiuni cu randament sporit conduce la adoptarea unor dimensiuni exagerate ale tălpii superioare care nu satisfac cerințele constructive și funcționale impuse elementului. Din acest motiv este important de evidențiat că raportul b_s/b la care se realizează randamentul maxim este condiționat de starea de tensiuni din fibra superioară.

Pe măsură ce efortul unitar σ_{bs} scade (fig. 5.21) iar efortul unitar $\bar{\sigma}_{bs}$ crește (fig. 5.22 și 5.23), maximul de randament se obține pentru lățimi mai mici de placă.

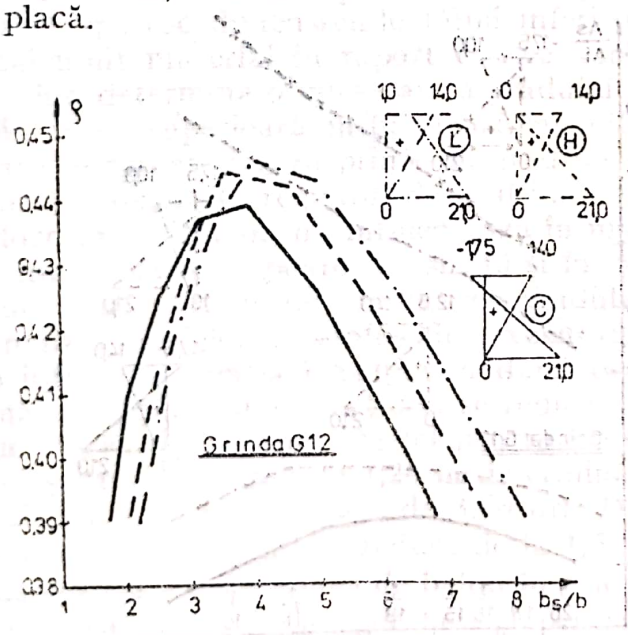


Fig. 5.21

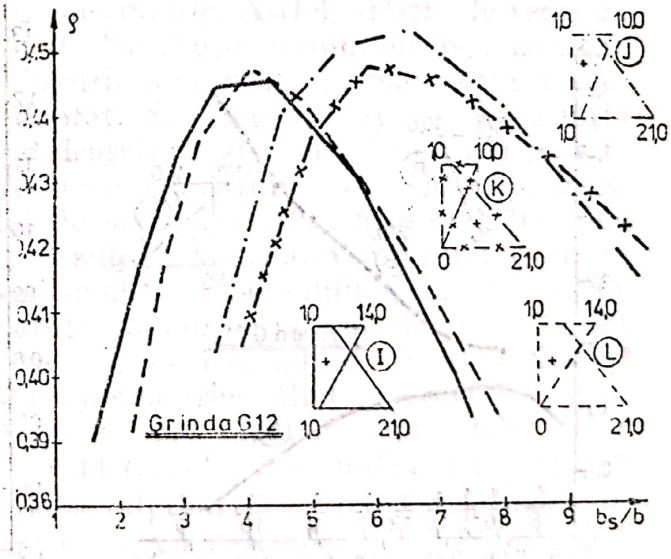


Fig. 5.22

În acest fel devine posibilă precizarea condițiilor în care se pot realiza secțiuni economice cu talpa superioară mai puțin dezvoltată. În aprecierea modului de distribuție a materialului pe secțiune, o importanță aparte o prezintă evaluarea simetriei acesteia în funcție de înălțime și de stările de tensiuni admise.

Se observă că nesimetria, apreciată prin rapoartele A_s/A_i și b_s/b_i, se reduce pe măsură ce eforturile unitare σ_{bs} cresc (fig. 5.24 ; 5.25 și 5.26) iar eforturile unitare σ_{bs} se reduc (5.27 și 5.28).

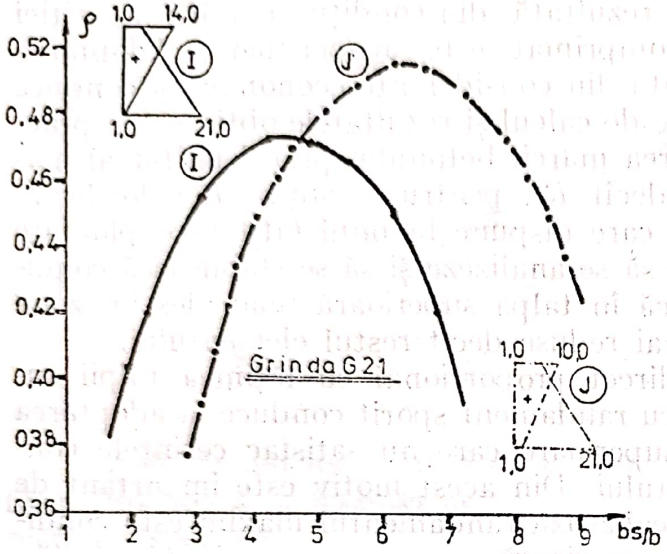


Fig. 5.23

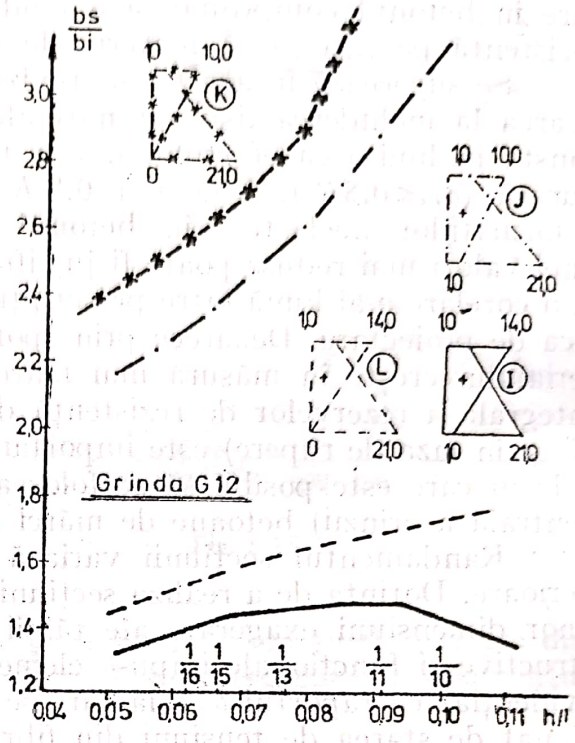


Fig. 5.24

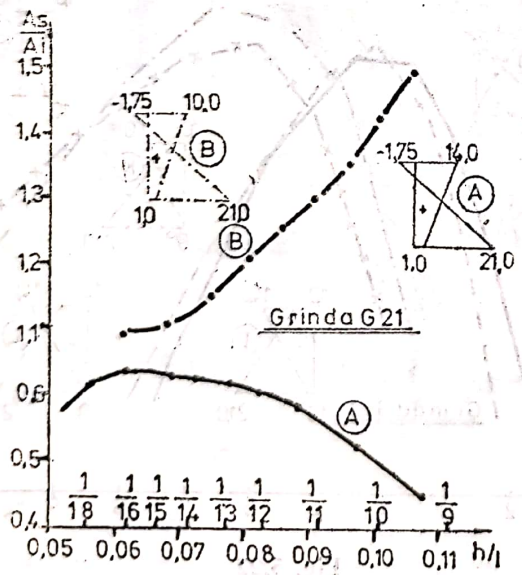


Fig. 5.25

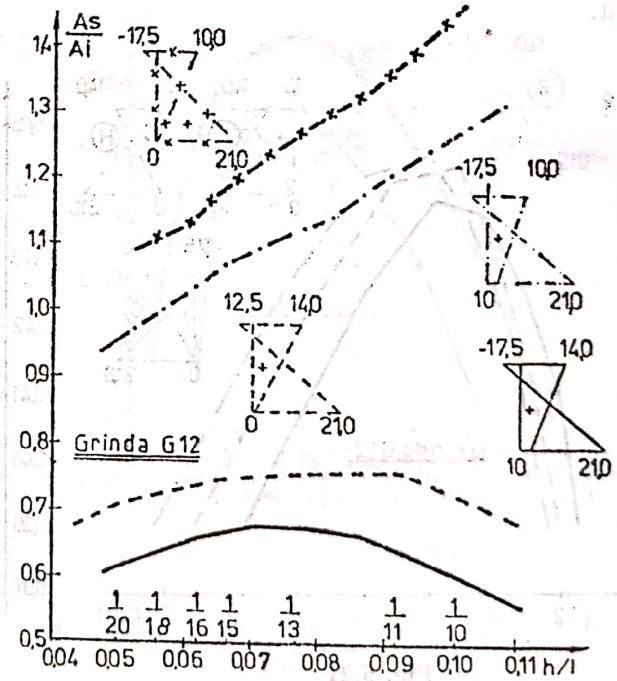


Fig. 5.26

În condițiile menținerii constante a înălțimii, această situație se explică prin legătura directă ce există între variația în sens diferit a tensiunilor din fibra superioară și modificarea intensității solicitării exterioare.

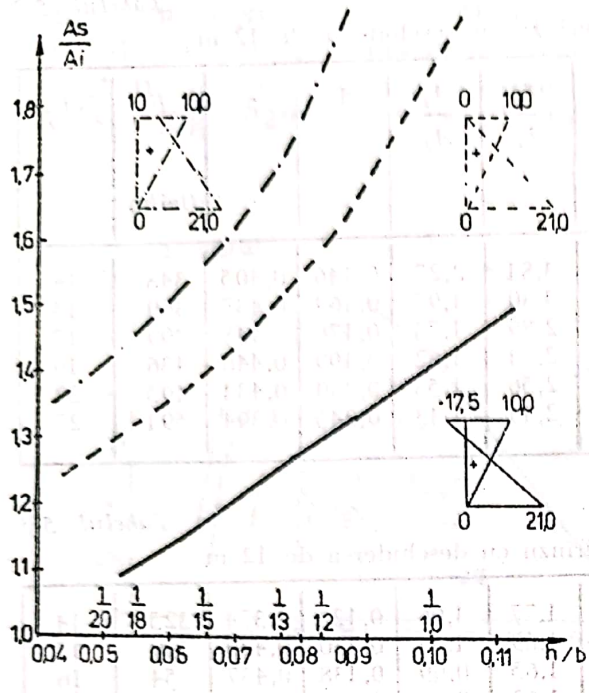
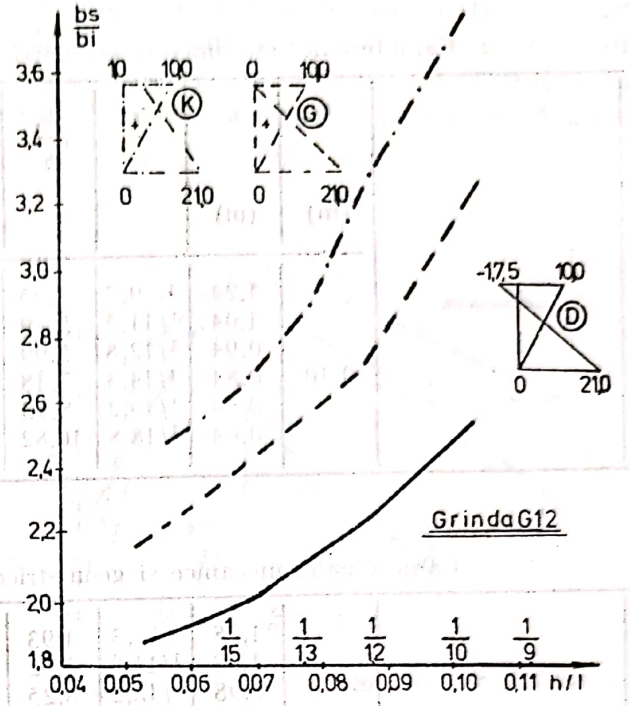


Fig. 5.27



Figg. 5.28

Creșterea eforturilor unitare $\bar{\sigma}_{bs}$ se datorește sporirii gradului de solicitare. Drept urmare crește și forța de precomprimare necesară compensării eforturilor de întindere din zona inferioară în exploatare. În acest fel, pe de o parte se micșorează starea de compresiune de la partea superioară a grinzii, iar pe de altă parte sporesc dimensiunile tălpii inferioare. Aceasta concentrează din ce în ce mai mult material în raport cu cea superioară (tabelele 5.2; 5.3; 5.4 și 5.5) putînd determina o micșorare a gradului de nesimetrie. Astfel, stările de tensiuni din fibra superioară influențează nemijlocit distribuția betonului pe secțiune care se caracterizează printr-un grad de simetrie mai mult sau mai puțin accentuat, funcție de regimul de înălțime adoptat. Se remarcă faptul că variația efortului unitar σ_{bi} nu influențează în mod deosebit distribuția betonului pe secțiune (situație ce poate fi sesizată și în cazul randamentului), dar creșterea acestuia are drept urmare reducerea gradului de nesimetrie (fig. 5.24 și 5.26). Din analiza tabelelor și graficelor prezentate rezultă că variația înălțimii exercită o influență esențială asupra modului de dispunere a betonului pe secțiune. Pe măsură ce înălțimea secțiunii se reduce, ariile tălpilor se măresc dar condiționat de starea de tensiuni. Astfel pentru grinda G_{21}, dacă se admite $\bar{\sigma}_{bs}=10$ N/mm² micșorarea înălțimii cu 1,20 m determină creșterea ariei tălpii superioare de 2,46 ori, iar a celei inferioare de 3,60 ori. Drept urmare raportul suprafețelor celor două tălpi (A_{bs}/A_{bi}) se reduce de la 1,5 la 1,11 (tabelul 6.3), indicînd o tendință de egalizare a cantității de beton în cele două tălpi odată cu reducerea înălțimii. Aceleași observații se pot face și pentru grinda cu deschiderea de 12 m, cînd micșorarea înălțimii cu 0,60 m, conduce la creșterea de 2,9 ori a lui A_{bs} și de 4,4 ori a lui A_{bi}, raportul A_{bs}/A_{bi} micșorîndu-se de la 2,7 la 1,43 (tab. 5.2). Comparînd datele din tabelele 5.2 și 5.4, precum și cele din tabelele 5.3 și 5.5, se constată că tendința de creștere relativă a ariei tălpii inferioare în raport cu cea superioară, odată cu reducerea înălțimii secțiunii, este atenuată dacă crește nivelul de solicitare în fibra superioară în exploatare.

Tabelul 5.2

Caracteristici mecanice și geometrice ale grinzii cu deschiderea de 12 m

	b (m)	h (m)	$\frac{h}{l}$	$\frac{b_s}{b}$	$\frac{b_i}{b}$	$\frac{b_s}{b_i}$	$\frac{A_s}{A_i}$	Ψ	ρ	F (lei/m)	NTT
		1,24	1/ 9,7	3,95	1,04	3,81	2,27	0,146	0,405	348	14
		1,04	1/11,5	5,19	1,57	3 30	1,97	0,161	0,437	369	15
		0,94	1/12,8	5,99	2,07	2,89	1,73	0,176	0,448	399	17
	0,10	0,84	1/14,3	7,18	2,65	2,71	1,62	0,199	0,446	436	19
		0,74	1/16,2	8,93	3,49	2,56	1,53	0,230	0,431	495	22
		0,64	1/18,8	10,82	4,31	2,41	1,43	0,245	0,394	591	27

Tabelul 5.3

Caracteristici mecanice și geometrice ale grinzii cu deschiderea de 12 m

		1,28	1/ 9,3	1,93	1,09	1,77	1,06	0,123	0,374	325	14
		1,08	1/11,0	2,72	1,61	1,69	1,01	0,130	0,420	339	15
		0,98	1/12,2	3,25	1,96	1,65	0,99	0,138	0,437	354	16
	0,10	0,88	1/13,6	3,93	2,43	1,62	0,96	0,151	0,446	374	17
		0,78	1/15,2	4,86	3,09	1,57	0,93	0,172	0,443	417	20
		0,68	1/17,5	6,18	4,10	1,51	0,89	0,207	0,425	481	24

Tabelul 5.4

Caracteristici mecanice si geometrice ale grinzii cu deschiderea de 21 m

	b (m)	h (m)	$\frac{h}{l}$	$\frac{b_s}{b}$	$\frac{b_i}{b}$	$\frac{b_s}{b_i}$	$\frac{A_s}{A_i}$	φ	ρ	F (lei/m)	NTT
		2,22	1/ 9,47	2,82	1,11	2,55	1,50	0,252	0,387	459	19
		2,02	1/10,41	3,38	1,47	2,30	1,36	0,256	0,420	462	20
		1,82	1/11,55	4,07	1,91	2,13	1,26	0,265	0,451	477	22
	0,10	1,62	1/12,98	4,95	2,60	1,91	1,12	0 286	0,481	518	24
		1,42	1/14,84	6,16	3,24	1,89	1,11	0,312	0,496	548	26
		1,32	1/15,94	6,97	3,93	1,77	1,05	0,342	0,502	595	28
		1,12	1/18,90	9,22	5,50	1,66	1,02	0,419	0,490	675	35
		1,02	1/20,50	11,00	7,23	1,52	0,90	0,502	0,481	797	43

Tabelul 5.5

Caracteristici mecanice și geometrice ale grinzii cu deschiderea de 21 m

		2,25	1/ 9,32	1,07	1,38	0,77	0,49	0,230	0,349	455	20
		2,05	1/10,23	1,52	1,70	0,88	0,53	0,231	0,381	463	21
		1,85	1/11,34	2,06	2,09	0,98	0,58	0,236	0,414	468	22
		1,65	1/12,75	2,72	2,61	1,05	0,62	0 247	0,444	485	24
	0,10	1.45	1/14,46	3,56	3,30	1,08	0,64	0,269	0,467	518	26
		1,25	1/16,80	4,75	4,60	1,03	0,62	0,318	0,477	604	32
		1,15	1/18,40	5,56	5,62	0,99	0,59	0,359	0,474	676	37
		1,05	1/20,00	6,58	6,80	0,96	0,56	0,410	0,461	764	43

Scanned with OKEN Scanner

Studiul variației randamentului în raport cu costul unitar arată că ρ prezintă un maxim diferit în funcție de stările de tensiuni din fibrele externe. Punctul de randament maxim se deplasează spre valori mai ridicate ale funcției de cost pe măsură ce intensitatea eforturilor unitare de compresiune la transfer crește (fig. 5.29), iar în exploatarea se reduce (fig. 5.30).

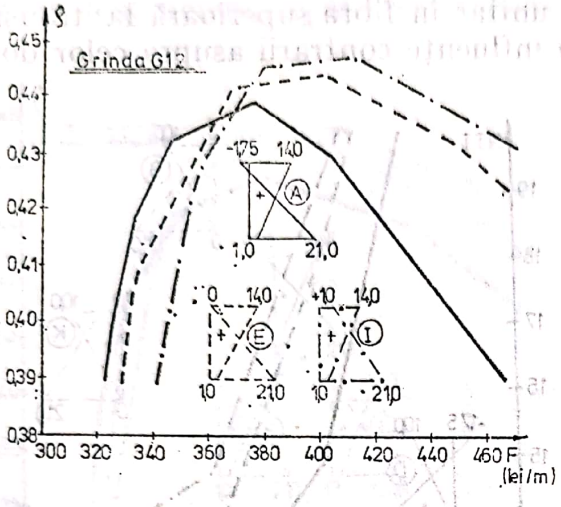


Fig. 5.29

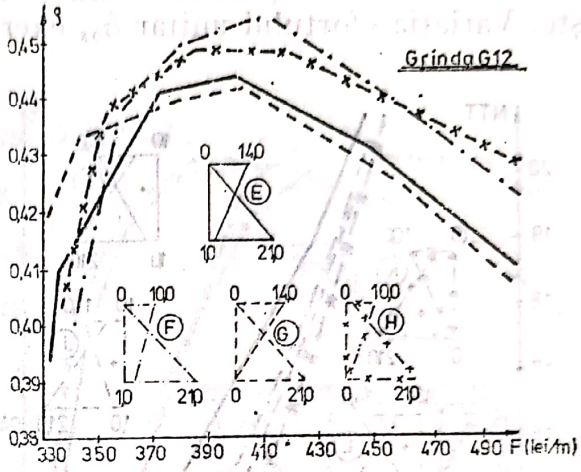


Fig. 5.30

În diagramele prezentate la o anumită valoare a randamentului se înregistrează două costuri unitare diferite. Creșterea continuă a funcției de cost este o consecință a variației înălțimii, cele două costuri corespund unor înălțimi diferite. Valoarea mai scăzută, deși este avantajoasă din punct de vedere economic nu poate impune alegerea soluției constructive deoarece s-ar obține un randament scăzut. Rezultă că și din punct de vedere al costului crearea unei stări avansate de compresiune la partea superioară a elementului în faza ini-

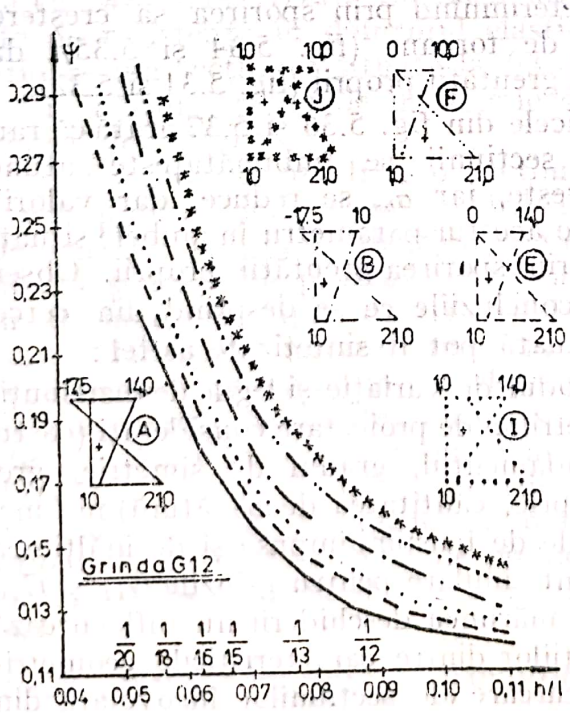


Fig. 5.31

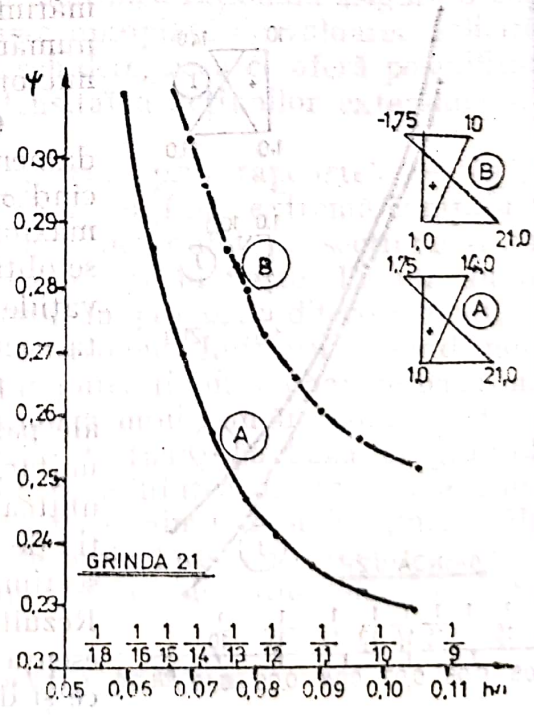


Fig. 5.32

țială nu este avantajoasă. În schimb, creșterea efortului unitar $\bar{\sigma}_{bs}$ favorizează obținerea unor secțiuni cu randament maxim pe baza unor costuri mai scăzute. Reducerea treptată a înălțimii elementului are drept efect sporirea greutății proprii (fig. 5.31 și 5.32) și a cantității de armătură activă (fig. 5.33 ; 5.34 și 5.35).

Această tendință se accentuează pentru rapoarte h/l mai mici decît 1/14... ...1/16 din deschidere și atunci cînd efortul unitar în fibra superioară la transfer crește. Variația efortului unitar $\bar{\sigma}_{bs}$ exercită influențe contrarii asupra celor două

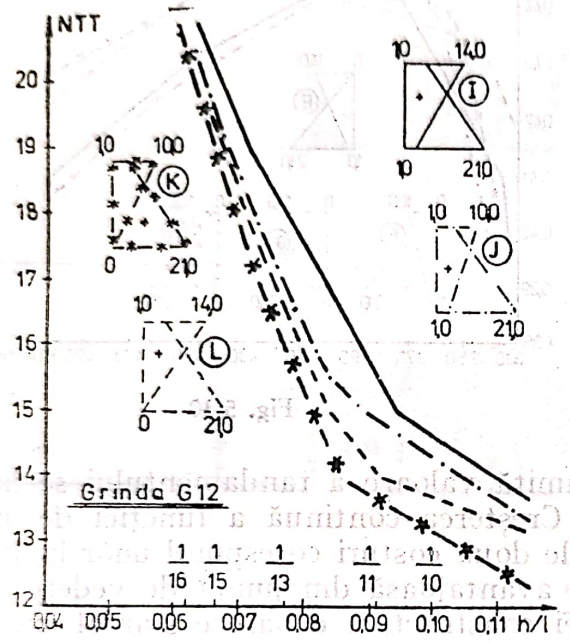


Fig. 5.33

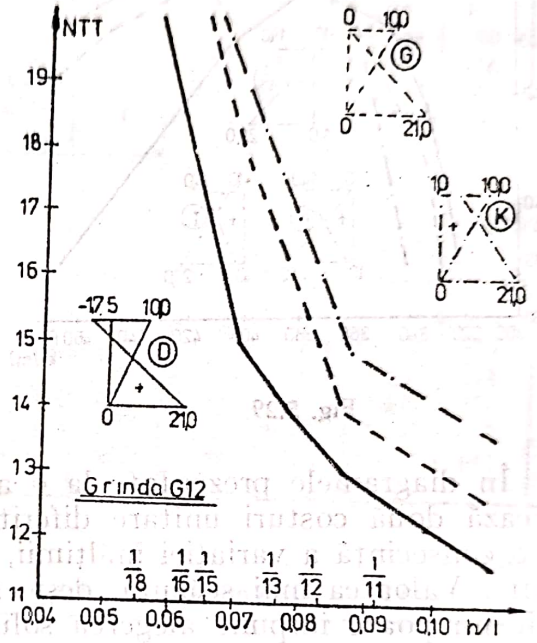


Fig. 5.34

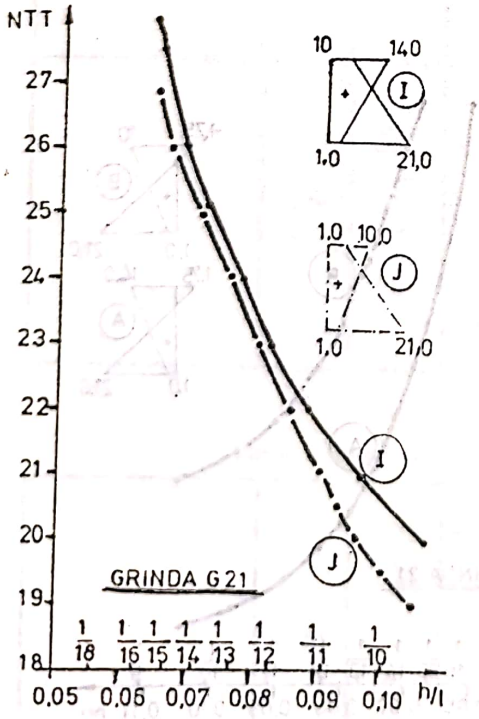


Fig. 5.35

mărimi, determinînd prin sporirea sa creșterea numărului de toroane (fig. 5.34 și 5.35), dar micșorarea greutății proprii (fig. 5.31 și 5.32).

Graficele din fig. 5.36 și 5.37 arată că randamentul secțiunii se îmbunătățește atunci cînd σ_{bs} crește, iar $\bar{\sigma}_{bs}$ se reduce, dar valorile maxime ale acestui parametru în ambele situații se obțin prin sporirea greutății proprii. Observațiile și concluziile ce se desprind din cercetarea efectuată pot fi sintetizate astfel :

1) Modul de variație și legile de distribuție ale parametrilor de proiectare considerați (costul unitar, randamentul, gradul de simetrie, greutatea proprie, cantitatea de armătură) în funcție de stările de tensiuni impuse și de înălțimea secțiunii sînt similare pentru grinzile G_{12} și G_{21}. Rezultă că mărimea deschiderii nu influențează esența relațiilor dintre caracteristicile geometrice și de încărcare ale secțiunilor încovoiate din beton precomprimat.

2) Înălțimea optimă a secțiunii transversale cea mai puternic solicitată, dedusă pe criterii economice, reprezintă indiferent de mărimea deschiderii o valoare prea ridicată pentru a putea fi acceptată în practică. Analizînd consecințele ce decurg din micșorarea treptată a înălțimii s-a constatat că în raport cu acest parametru, randamentul prezintă un maxim în funcție de mărimea deschiderii. Secțiunile a căror înălțime conduc la valori maxime ale randamentului au fost denumite *secțiuni raționale.*

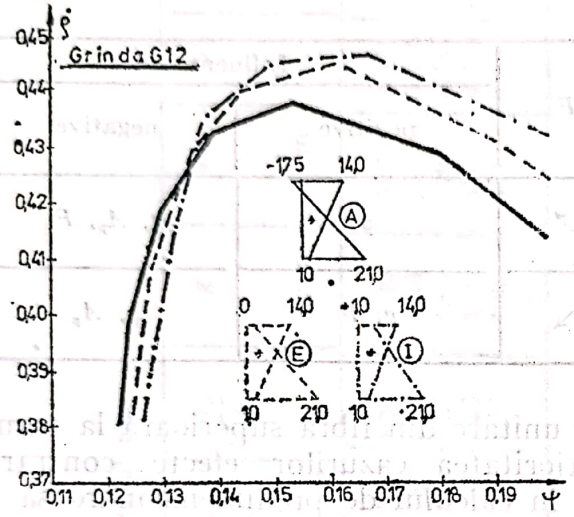


Fig. 5.36

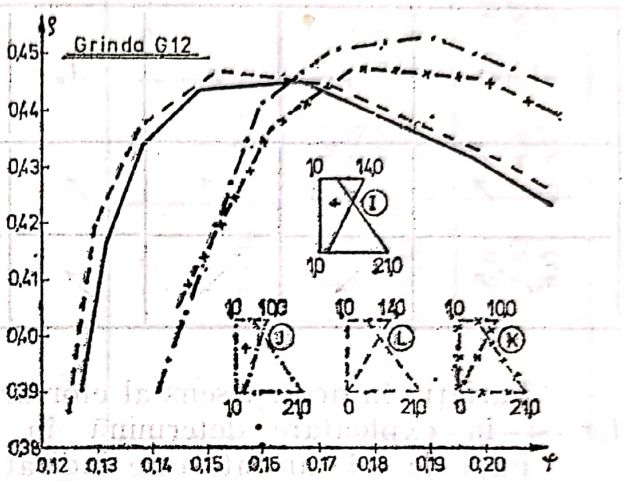


Fig. 5.37

Adoptarea lor implică consumuri suplimentare de oțel și beton față de secțiunea optimă, dar prezintă avantajul că pot fi utilizate în practică. Pe baza rezultatelor obținute se propune pentru faza de predimensionare a grinzilor precomprimate cu armătură aderentă adoptarea înălțimii raționale, ca fiind egală cu : $h=(1/14...1/15)l$. Calculele arată că înălțimea rațională asigură o capacitate de rezistență în domeniul elastic foarte apropiată de valoarea solicitării exterioare din secțiunea situată la $l/3$ din deschidere, ceea ce oferă posibilitatea definirii înălțimii raționale în funcție de intensitatea acțiunilor exterioare și de mărimea deschiderii.

3) Gradul de simetrie al secțiunii, apreciat prin raportele A_{bs}/A_{bi} și b_b/b_t este puternic influențat de stările de tensiuni din fibra extremă comprimată și de variația înălțimii. Distribuția rațională a betonului pe secțiune trebuie analizată și stabilită pentru fiecare caz de solicitare în parte. La un anumit regim de înălțime tălpile concentrează material în proporții diferite funcție de mărimea eforturilor unitare admise în fibrele extreme. Indicații privind modul de repartizare a betonului în cele două tălpi ar putea fi emise doar pe baza unor studii amănunțite întocmite în acest sens. Analiza unui număr însemnat de variante de alcătuire a secțiunilor transversale efectuate pe baza programului OPTIGEL a condus la unele concluzii privind posibilitatea de stabilire a principalelor caracteristici geometrice. Deoarece lățimea inimii, b și înălțimea tălpii superioare h_s sînt date inițiale ale problemei de proiectare, s-a cercetat influența lor asupra formei secțiunii. S-a ajuns la concluzia că se obțin soluții raționale atunci cînd :

$$b=l/120 \text{ pentru } h<0{,}8 \text{ m} ; \quad b=0{,}08+l/600 \text{ pentru } h\geq 0{,}8 \text{ m}$$

$$h_s=(1/100...1/150)l$$

În privința lățimii tălpii superioare, soluțiile raționale corespund unor valori ale lui b_s situate în intervalul :

$$b_s=(1/30...1/35)l$$

4) Variabilitatea eforturilor unitare în fibra superioară a secțiunii exercită influențe diferite asupra unor parametri importanți. Din analiza graficelor prezentate mai sus, notînd ↗ creșterea mărimilor respective în sens algebric și cu ↘ micșorarea lor, rezultă următoarea situație :

Efort	ρ	g	A_p	F	Influențe	
					pozitive	negative
σ_{bs} ↗	↗	↗	↗	↗	ρ	g, A_p, F
$\bar{\sigma}_{bs}$ ↗	↘	↘	↗	↘	g, F	ρ, A_p

Variația în același sens al eforturilor unitare din fibra superioară la transfer și în exploatare determină în majoritatea cazurilor efecte contrarii.

Față de cele arătate este indicat ca în calculul de predimensionare să se admită eforturi unitare de întindere cît mai mari posibile la transfer și valori moderate pentru eforturi de compresiune în exploatare.

5) Variația efortului unitar $\bar{\sigma}_{bi}$ în limite restrînse nu influențează în mod deosebit forma secțiunii transversale, randamentul acestuia sau costul elementului.

5.5.2. Considerații privind calculul optim în faza de cedare

Calculul în faza de cedare, conform prescripțiilor românești în vigoare, include o serie de verificări ale secțiunii de beton și armătură la diferite stări limită. Secțiunea de beton este de regulă impusă sau rezultă dintr-un calcul de predimensionare. Numărul de iterații parcurs pentru ca elementul să îndeplinească condițiile de calitate cerute de norme, poate fi redus, dacă secțiunea este alcătuită judicios, pe baza unor calcule de predimensionare riguroasă. Dat fiind parametrii numeroși care influențează forma secțiunii transversale, este indicat ca aceasta să rezulte în urma unor studii amănunțite a tuturor factorilor care intervin, studiu ce poate fi efectuat cu ajutorul programului OPTICED. Cu ajutorul lui au fost cercetate aspectele ce decurg din considerarea variabilității înălțimii și a mărcii de beton.

În tabelele 5.6...5.9 sînt prezentate sintetic rezultatele calculului efectuat după cele două metode, pentru același element, cînd au fost menținute constante grosimea inimii și încărcarea din faza de exploatare. O comparație detaliată a parametrilor de proiectare obținuți prin cele două metode întîmpină unele dificultăți, deoarece în primul caz, forma și dimensiunile tălpilor variază în funcție de înălțimea secțiunii și de stările de tensiuni, iar în al doilea caz acestea sînt mărimi constante. Datorită acestui fapt, dimensionarea în domeniul elastic conduce la creșterea continuă a greutății pe măsură ce înălțimea scade, în timp ce calculul în faza de cedare se face în condițiile existenței unei variații în același sens a celor două mărimi. Se observă echivalența stărilor de tensiuni și al

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.6

Grindă calculată în domeniul elastic

h	σ_{bi}	$\bar{\sigma}_{bi}$	σ_{bs}	$\bar{\sigma}_{bs}$	b	$\frac{b_s}{b}$	$\frac{b_i}{b}$	$\frac{b_s}{b_i}$	$\frac{A_s}{A_i}$	g	F	ρ	ψ	NNT	B
m	N/mm²	N/mm²	N/mm²	N/mm²	m					KN/m	lei/m				
1,24						2,79	1,10	2,54	1,50	3,80	319	0,396	0,132	12	
1,04						3,77	1,69	2,23	1,33	4,13	338	0,436	0,143	13	
0,94	210	0	−1,75	10	0,10	4,46	2,10	2,12	1,27	4,46	356	0,447	0,155	14	500
0,84						5,39	2,66	2,03	1,21	4,99	382	0,449	0,173	15	
0,74						6,71	3,46	1,94	1,12	5,86	434	0,437	0,203	18	

Tabelul 5

Grindă calculată în stadiul de cedare

h	σ_{bi}	$\bar{\sigma}_{bi}$	σ_{bs}	$\bar{\sigma}_{bs}$	b	$\frac{b_s}{b}$	$\frac{b_i}{b}$	$\frac{b_s}{b_i}$	$\frac{A_s}{A_i}$	g	F	ρ	ψ	NNT	B
m	N/mm²	N/mm²	N/mm²	N/mm²	cm					kN/m	lei/m				
1,06	13,2	1,60	−2,5	7,6						6,26	387	0,512	0,216	11	
0,96	15,0	1,30	−2,8	9,0						6,02	386	0,500	0,208	12	500
0,86	9,2	1,70	−3,5	10,7	0,10	6	3	2	1,19	5,76	400	0,484	0,200	15	
0,76	24,5	0,034	−3,2	14,6						5,52	429	0,457	0,192	20	
0,98	14,9	1,73	−2,8	8,7						6,07	431	0,503	0,210	12	
0,88	18,0	1,87	−3,3	10,4						5,82	436	0,487	0,201	14	600
0,78	21,2	1,20	−3,8	12,9						5,57	441	0,467	0,194	16	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.8

Element calculat în domeniul elastic

h m	σ_{si} N/mm²	$\bar{\sigma}_{bi}$ N/mm²	σ_{rb} N/mm²	$\bar{\sigma}_{bs}$ N/mm²	b m	$\frac{b_s}{b}$	$\frac{b_i}{b}$	$\frac{b_s}{b_i}$	$\frac{A_s}{A_i}$	g KN/m	F lei/m	ρ	ψ	NNT	B
1,22						2,99	1,33	2,63	1,57	4,61	361	0,402	0 162	14	
1,02						4,02	1,75	2,31	1,37	5,06	384	0,439	0, 176	15	
0,92	21,0	1,7	— 1,1	8,5	0,12	4,77	2, 18	2,21	1,31	5,52	414	0,449	0, 191	17	500
0,82						5,82	2,64	2,21	1,31	6, 13	442	0,446	0,213	18	
0,72						7,31	3,41	2, 14	1,27	7,23	502	0,431	0,251	21	

Tabelul 5.9

Element calculat în stadiul de cedare

h m	σ_{bi} N/mm²	$\bar{\sigma}_{bi}$ N/mm²	σ_{bs} N/mm²	$\bar{\sigma}_{bs}$ N/mm²	b m	$\frac{b_s}{b}$	$\frac{b_i}{b}$	$\frac{b_r}{b_i}$	$\frac{A_s}{A_i}$	g KN/m	F lei/m	ρ	ψ	NNT	B
0,995	14,4	1,60	—2,9	8,3						631	398	0,488	0,221	12	
0,895	17,5	1,80	—3,4	9,9						607	403	0,477	0,210	14	500
0,795	23,2	1,02	—3,6	12,9	0,12	6	3	2	1,19	577	430	0,457	0, 198	19	
0,92	16,2	1,60	—3,2	9,50						615	442	0,479	0,213	13	
0,820	19,5	1,40	—3,8	11,5						585	444	0,465	0,202	15	600
0,72	24,3	1,10	—3,7	15,4						555	462	0,440	0, 193	19	

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 5.10

Tipul soluției	σ_{bs} $\frac{N}{mm^2}$	$\bar{\sigma}_{bs}$ $\frac{N}{mm^2}$	σ_{bi} $\frac{N}{mm^2}$	$\bar{\sigma}_{bi}$ $\frac{N}{mm^2}$	h m	$\frac{b_s}{b}$	$\frac{b_i}{b}$	$\frac{b_s}{b_i}$	ρ	g		F		Cant. armăt.	
										KN/m	în % față de soluția tip	lei/m	în % față de sol. tip	NNT	în % față de sol. tip
Pr. tip IPCT 5213/3-1979	— 1,88	9,7	20,3	14,1	0,80	5,00	2,50	2,00	0,475	5,83	—	435	—	18	—
Program OPTIGEL	— 1,75	10,0	21,0	0	0,84	5,39	2,66	2,03	0,449	4,99	— 14,4%	382	— 12%	15	— 16,6 %
Program OPTICED	— 3,5	10,8	19,2	17,0	0,86	6,00	3,00	2,00	0,485	5,77	— 1,03%	400	— 8%	15	— 16,6 %

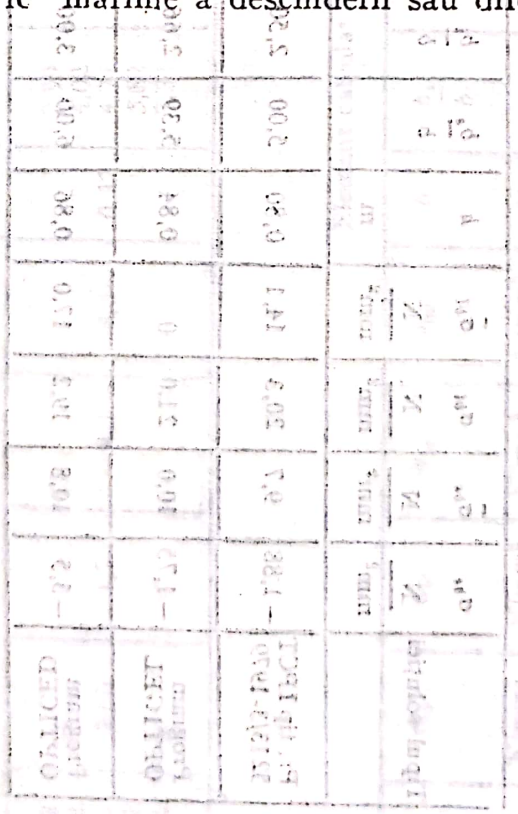
Scanned with OKEN Scanner

elementelor geometrice ale secțiunii transversale pentru înălțimi situate în jurul valorii de 0,8 m. În acest domeniu nu se constată diferențe evidente între rezultatele ce s-au obținut prin intermediul celor două procedee. Se remarcă următoarele aspecte :

1) Soluția optimă a elementului se obține pentru înălțimi situate în intervalul (1/11...1/12)l, fiind deci mai mari decît valorile optime și mai apropiate de soluțiile raționale stabilite în domeniul elastic.

2) Greutatea proprie și cantitatea de armătură (deci implicat și costul unitar) cresc continuu pe măsură ce înălțimea scade, în timp ce în aceleași condiții randamentul scade. Variația randamentului nu mai evidențiază un punct de maxim, dar comparativ cu domeniul elastic se pot obține valori mai ridicate ca urmare a dispunerii avantajoase a betonului pe secțiune.

3) Îmbunătățirea calității betonului conduce la micșorarea greutății proprii, a cantității de armătură precum și a randamentului, dar în funcție de nivelul prețurilor poate determina, în anumite împrejurări, o creștere a cheltuielilor materiale. În tabelul 5.10 sînt prezentate comparativ, față de soluția tip, rezultatele ce s-au obținut la proiectarea grinzii cu deschiderea de 12 m. utilizînd procedeele descrise în acest capitol. Cercetările efectuate au avut drept scop elaborarea unor procedee de dimensionare optimă a secțiunilor încovoiate din beton precomprimat în domeniul de comportare elastică și în faza de rupere. Metodele de calcul propuse au fost algoritmizate și transpuse în programe scrise în limbajul FORTRAN IV. Cu ajutorul lor s-a cercetat influența pe care diverși parametri de proiectare o exercită asupra formei secțiunii transversale, a secțiunii de armătură și a modului său de distribuție. Programele de calcul, precum și concluziile și indicațiile de proiectare, rezultate în urma prelucrării a 170 variante de alcătuire, pot fi folosite de către specialiști la rezolvarea grinzilor cu armătură activă aderentă rectilinie și a sistemelor constructive care se asimilează în calcul cu acestea, pentru oric mărime a deschiderii sau diferite sisteme de încărcare.



C. OPTIMIZAREA STRUCTURILOR CU COMPORTARE DINCOLO DE LIMITA ELASTICĂ

CAPITOLUL 6

6.1 Proiectarea optimă a rețelelor de grinzi în domeniul plastic

În acest subcapitol se tratează după W. Prager, dispunerea și dimensionarea optimă a grinzilor unei rețele plane. Dimensionarea este efectuată astfel încît forțele verticale date constituie o încărcare de cedare în sensul analizei limite iar greutatea totală a rețelei este minimă. J. Heyman a fost primul care a determinat încărcarea de cedare plastică a unei rețele de grinzi și a propus o metodă inversă pentru obținerea dispunerii favorabile a grinzilor acesteia. Considerînd planul rețelei ca planul $z=0$ al unui sistem de coordonate rectangulare x, y, z. J. Heyman a ales o funcție continuă $v(x, y)$ cu derivate de ordinul întîi continui drept săgețile unui mecanism de cedare ce satisface condițiile de rezemare iar proiecțiile ortogonale ale liniilor de curbură principale ale suprafeței $z=v(x, y)$ pe planul $z=0$ sînt axele grinzilor curbe ale rețelei. Această alegere evită torsiunea grinzilor dar nu reprezintă o rețea de greutate minimă. Se va arăta că procedeul lui Heyman nu furnizează dispunerea optimă a grinzilor decît dacă cel puțin una dintre curburile principale ale suprafeței $z=v(x, y)$ are peste tot aceeași valoare absolută iar cealaltă curbură principală are cel mult această valoare absolută. Această condiție cinematică pentru mecanismul de cedare a unei rețele optime a fost determinată independent de C.T. Morley și G.I.N. Rozvany. G. Sacchi și M. Save ca și P.G. Lowe și R.E. Melchers au studiat de asemeni problema dispunerii optime a grinzilor unei rețele și au dat cîteva soluții, dar marea majoritate a soluțiilor cunoscute se găsesc în cartea lui G.I.N. Rozvany. Înainte de a prezenta studiul teoretic vom prezenta exemplul unei rețele optime. Este vorba de o rețea pătrată simplu rezemată pe laturi (fig. 6.1). Două laturi vecine, și dreapta care unește centrele lor formează un triunghi AEH, în care grinzile sînt paralele cu dreapta HE. În pătratul central $EFGH$, dispunerea optimă a grinzilor nu este univocă. Totuși în toate cazurile, grinzile acestui pătrat sînt simplu rezemate pe grinzile EF, FG, GH și HE. În locul grinzilor reprezentate în fig. 6.1, s-ar putea, de exemplu, reprezenta grinzi paralele cu EF sau EH, Fig. 6.1 prezintă grinzi de dimensiuni finite, discrete, dar rețeaua optimă este o aranjare densă de grinzi infinit subțiri în direcțiile indicate. Evident, acest tip de rețea nu este practic ; dar el furnizează limita inferioară a greutății, informație utilă pentru a evalua eficacitatea rețelelor practice. Rezultatele fundamentale sînt prezentate pentru o grindă izolată și sînt apoi extinse în mod intuitiv la rețele.

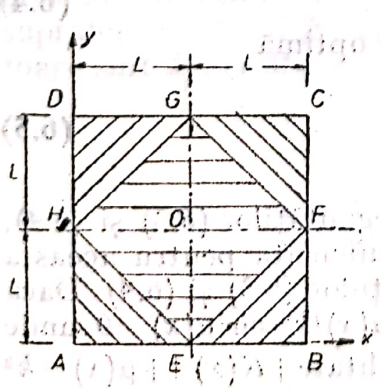


Fig. 6.1

6.1.1. Condiția de optimalitate pentru o grindă

Se consideră o grindă simplu rezemată la extremitatea $x=0$, încastrată la extremitatea $x=L$ și acționată de forța concentrată P în $x=x_0$ (fig. 6.2a)

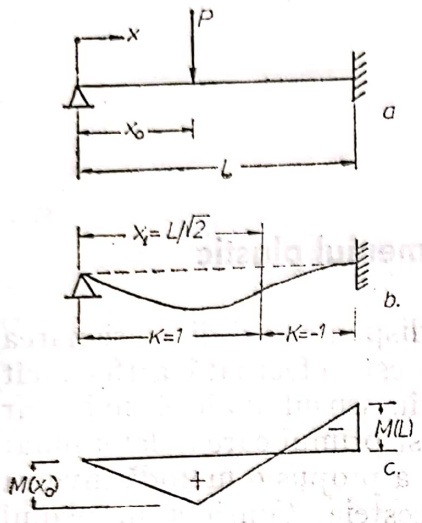


Fig. 6.2

Momentul plastic $\overline{M}$ variază continuu cu distanța x în lungul grinzii iar contribuția unui element de lungime dx la greutatea grinzii este proporțională cu produsul $\overline{M}\,dx$. Această ipoteză corespunde grinzilor cu secțiune dreptunghiulară de înălțime constantă și de lățime variabilă sau grinzilor sandwich ce au partea centrală, ușoară, de înălțime și lățime constantă iar tălpile identice cu grosime variabilă. Dacă P este forța de cedare a grinzii optime, săgeata $v(x)$ și curbura corespunzătoare $K(x)=-d^2v/dx^2$ a unui mecanism de cedare satisfac ecuația :

$$Pv(x_0)=\int_0^L \overline{M}(x)\,|\,K(x)\,|\,dx \tag{6.1}$$

Relația (6.1) arată că lucrul mecanic al forței P este egal cu energia disipată. Pe de altă parte, dacă P este inferioară sau cel mult egală forței de cedare a grinzii pentru momentul plastic $\overline{M}^*(x)$, avem

$$Pv(x_0)\leqslant\int_0^L \overline{M}^*(x)\,|\,K(x)\,|\,dx \tag{6.2}$$

conform teoremei cinematice a analizei limită, deoarece săgeata și curbura grinzii optime sînt cinematic admisibile pentru cealaltă grindă. Din relațiile (6.1) și (6.2), rezultă

$$\int_0^L \{\overline{M}^*(x)-\overline{M}(x)\}\,|\,K(x)\,|\,dx\geqslant 0 \tag{6.3}$$

Dacă punctul de aplicație al forței P este foarte aproape de încastrare grinda optimă va avea $\overline{M}(x)=0$ pentru $0\leqslant x\leqslant x_0$. Cum momentul plastic $\overline{M}^*(x)$ este nenegativ

$$\overline{M}^*(x)-\overline{M}(x)\geqslant 0,\qquad \overline{M}(x)=0 \tag{6.4}$$

În final, dacă grinda de moment plastic $\overline{M}(x)$ este optimă

$$\int_0^L \{\overline{M}^*(x)-\overline{M}(x)\}\,dx\geqslant 0 \tag{6.5}$$

Dorim ca inegalitatea (6.5) să fie o consecință a inegalităților (6.3) și (6.4). După o teoremă a lui G. Farkas, condiția necesară și suficientă pentru aceasta este ca (6.5) să fie o combinație liniară nenegativă a relațiilor (6.3) și (6.4). Dacă coeficienții nenegativi ai acestei combinații sînt l/k^2 și $\mu(x)/k^2$ cu $\mu(x)=0$ unde $\overline{M}(x)>0$, teorema lui Farkas furnizează condiția de optimalitate $|\,K(x)\,|+\mu(x)=k^2$ sau

$$|K(x)| \begin{cases} =k & \text{unde } \overline{M}(x)>0 \\ \leqslant k & \text{unde } \overline{M}(x)=0 \end{cases} \tag{6.6}$$

Cum săgeata și curbura unui mecanism de cedare sînt determinate pînă la o constantă, se poate lua $k^2=1$.

Dacă se consideră că punctul de aplicație al forței P este suficient de depărtat de extremitatea încastrată a grinzii, curbura mecanismului de cedare a grinzii optime va avea valoarea 1 pentru $0\leqslant x\leqslant x_1$ și valoarea -1 pentru $x_1<x\leqslant L$, unde mărimea x_1 trebuie determinată. În plus, săgeata trebuie să satisfacă la condițiile de rezemare $v(0)=v(L)=v'(L)=0$, să fie continuă și să aibă o derivată primă continuă pentru $x=x_1$. Aceste condiții dau $x_1=L/\sqrt{2}$ (fig. 6.2b, unde sînt reprezentate săgețile mecanismului de cedare a grinzii optime). În secțiunea $x=x_1$, curbura și prin urmare momentul încovoietor $M(x)$ trebuie să schimbe de semn. Grinda optimă se comportă deci ca și cum ar avea o articulație în $x=x_1$ iar momentul încovoietor are valoarea ca pentru grinda static determinată (fig. 6.2c, unde se reprezintă diagrama momentului încovoietor al grinzii optime: $M(x_0)=P(x_1-x_0)\,x_0/x_1$, $M(L)=-Px_0(L-x_1)/x_1$. Momentul plastic al grinzii este $\overline{M}(x)=|M(x)|$.

Este important de notat că chiar dacă se găsește o articulație în $x=x_1$, derivata dv/dx trebuie să fie continuă în această secțiune. În sfîrșit, dacă există discontinuitatea θ a lui dv/dx în $x=x_1$ ar trebui adăugată expresia $\overline{M}^*(x_1)\,[\theta]$ în membrul doi al inegalității (6.2), ceea ce ar invalida concluziile trase.

6.1.2. Condiția de optimalitate pentru o rețea

Pentru o singură grindă condiția de optimalitate cere un mecanism de cedare pentru care săgeata $v(x)$ și prima sa derivată sînt continue. În plus, expresia săgeții trebuie să satisfacă la condițiile de rezemare și să aibă o curbură a cărei valoare absolută este egală sau inferioară unității după cum momentul plastic este pozitiv sau nul. Pentru o dispunere densă și optimă a grinzilor unei rețele, săgeata mecanismului de cedare se caracterizează printr-o funcție continuă $v(x, y)$ în planul rețelei care admite derivate de ordinul întîi continui și satisface condițiilor de rezemare. În plus, în lungul grinzilor rețelei curbura corespunzătoare acestei acestei săgeți trebuie să aibă valoarea absolută 1, în timp ce în orice altă direcție valoarea absolută a curburii trebuie să fie inferioară sau cel mult egală cu 1. Prin urmare, dispunerea optimă a grinzilor unei rețele este indicată prin direcțiile principale ale curburii suprafeței $z=v(x, y)$ unde funcția $v(x, y)$ trebuie să satisfacă la condițiile menționate. Dacă se notează curburile principale ale acestei suprafețe cu K_1 și K_2 cu $|K_1|=1$, și dacă momentele încovoietoare corespunzătoare sînt M_1 și M_2, se disting cinci regiuni (tab. 6.1):

Tabelul 6.1

Tipuri de regiuni

Tip	K_1	K_2	M_1	M_2
R^+	1	$-1<K_2<1$	$\geqslant 0$	0
R^-	-1	$-1<K_2<1$	$\leqslant 0$	0
S^+	1	1	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$
S^-	-1	-1	$\leqslant 0$	$\leqslant 0$
T	1	-1	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$

Scanned with OKEN Scanner

6.1.3. Rețea pătrată simplu rezemată pe laturi

Pentru multe rețele optime cu reazeme rectilinii, mecanismul de cedare se prezintă astfel : domeniul rețelei este constituit din subdomenii în care săgeata $v(x, y)$ este un polinom de gradul doi în x și y. Se consideră o rețea pătrată de latură $2L$, simplu rezemată pe conturul său. În raport cu coordonatele x, y indicate pe fig. 6.1, există următoarele condiții de rezemare : $v(x, 0) = v(0, x) = 0$ în vecinătatea colțului A. Expresia :

$$v = xy = v_1 \tag{6.7}$$

satisface acestor condiții. Curburile principale sînt rădăcinile K_1 și K_2 ale ecuației caracteristice :

$$\begin{vmatrix} K + \partial v/\partial x^2 & \partial^2 v/\partial x \partial y \\ \partial^2 v/\partial x \partial y & K + \partial^2 v/\partial y^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.8}$$

iar unghiul θ_i pe care direcția principală corespunzătoare lui K_i îl formează cu axa x este dat de :

$$(K_i + \partial^2 v/\partial x^2) \cos \theta_i + (\partial^2 v/\partial x \partial y) \sin \theta_i = 0 \tag{6.9}$$

Pentru săgeata (6.7) se găsește

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -1, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = -1, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = 1 \tag{6.10}$$

În triunghiul AEH există deci o regiune de tip T. Direcțiile principale în această regiune sînt paralele cu diagonalele pătratului $ABCD$. Prin simetrie, regiunile EBF FCG și GDH sînt deasemeni de tipul T. Faptul că curbura are valoarea 1 în lungul liniilor EF și EH sugerează că pătratul central $EFGH$ este de tipul S^+, adică în acest pătrat săgeata are forma :

$$v = -(x^2 + y^2 + ax + by + c)/2 = v_2 \tag{6.11}$$

unde a, b, c sînt constante. În lungul laturii EH avem următoarele condiții de continuitate :

$$v_1 = v_2 \quad \partial v_1/\partial x = \partial v_2/\partial x \text{ pentru } x + y = L \tag{6.12a}$$

iar în lungul laturilor EG și FH condițiile de simetrie :

$$\begin{cases} \partial v_2/\partial x & \text{pentru } x = L \\ \partial v_2/\partial y & \text{pentru } y = L \end{cases} \tag{6.12b}$$

Se constată ușor că expresia (6.11) cu $a = b = -2L$ și $c = L^2$ satisface la condițiile (6.12). Completînd expresiile v_1 și v_2 care au fost găsite pentru săgeată din triunghiurile AEH și EOH ținînd cont de simetria în raport cu liniile EG și FH, se obține mecanismul de cedare al rețelei optime. În triunghiurile de colț, cum ar fi AEH, direcțiile principale de curbură sînt date de diagonalele pătratului $ABCD$. În pătratul central $EFGH$, fiecare direcție poate fi considerată ca principală. Dispunerea grinzilor considerată inițial corespunde la acest mecanism de cedare.

Într-un punct curent al rețelei optime, în general, nu există decît două direcții principale de curbură și cel puțin o curbură principală are valoarea absolută 1. Prin urmare, printr-un punct curent al rețelei optime trec două grinzi ortogonale sau o singură grindă. Dacă momentele plastice ale acestor grinzi sînt $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$, unde $\overline{M}_2$ poate fi nul, greutatea rețelei este proporțională cu expresia :

$$\Omega = \int (\overline{M}_1 + \overline{M}_2)\, dA \tag{6.13}$$

unde dA este elementul de arie al rețelei. Cum $|K_1|=1$ și $|K_2|$ nu poate fi distinct de 1 decît dacă $\overline{M}_2=0$, această expresie devine

$$\Omega=\int(\overline{M}_1|K_1|+\overline{M}_2(K_2|)\,dA \tag{6.14}$$

Al doilea membru al relației (6.14), care este energia disipată, este egal cu lucrul mecanic al încărcării exterioare ; prin urmare

$$\Omega=\int pv\,dA \tag{6.15}$$

unde $p=p(x,y)$ este intensitatea încărcării repartizate. Pentru $p=$ const. se găsește

$$\Omega=5pL^4/6 \tag{6.16}$$

pentru rețeaua optimă în timp ce o rețea pătrată ale cărei grinzi sînt paralele cu laturile conturului, are greutatea proporțională cu

$$\Omega^*=4pL^4/3 \tag{6.17}$$

adică o greutate care este cu 60% mai mare decît cea a rețelei optime.

Se notează că într-un triunghi de colț, cum ar fi AEH, există două posibilități de a transmite o forță concentrată la laturile conturului ce formează colțul. Se poate utiliza fie o singură grindă paralelă cu ipotenuza acestui triunghi, fie o grindă normală la ipotenuză, simplu rezemată pe conturul rețelei și pe o altă grindă paralelă cu ipotenuza. Pe fig. 6.3 cele două posibilități sînt arătate în triunghiurile AEH și EBF ; cerculețele mici indică punctele de aplicație ale forțelor concentrate. Se indică de asemeni maniera în care o forță concentrată aplicată într-un punct al pătratului central $EFGH$ este transmisă într-un mod optim la reazemele rețelei printr-o grindă simplu rezemată pe două grinzi ale conturului $EFGH$.

Chiar dacă dispunerea optimă a grinzilor nu este univocă, greutatea rețelei care după (6.15) este proporțională cu produsul dintre forța concentrată și săgeată punctului său de aplicație este univocă. Pentru forțe concentrate, diagrama de eficacitate (fig. 6.4) indică raportul dintre greutatea minimă și greutatea unei grinzi paralele la o latură a rețelei. Se vede că pentru punctele de aplicare situate aproape de colțul rețelei o grindă paralelă cu conturul nu este prea eficace

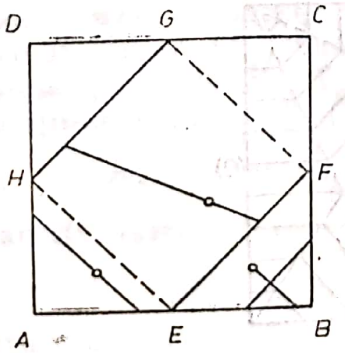


Fig. 6.3

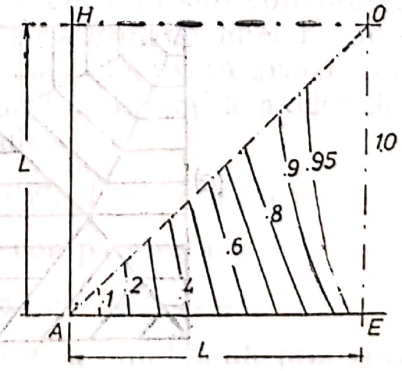


Fig. 6.4

6.1.4. Exemple de rețele dreptunghiulare

Pînă aici nu s-au considerat decît reazeme simple. Pentru un colț în unghi drept format din grinzi simplu rezemate (s) sau încastrate (e) figura (6.5) indică dispunerea optimă a grinzilor în vecinătatea acestuia. Pe figura (6.5 a) laturile $x=0$ și $y=0$ sînt simplu rezemate iar săgeata mecanismului de cedare al rețelei

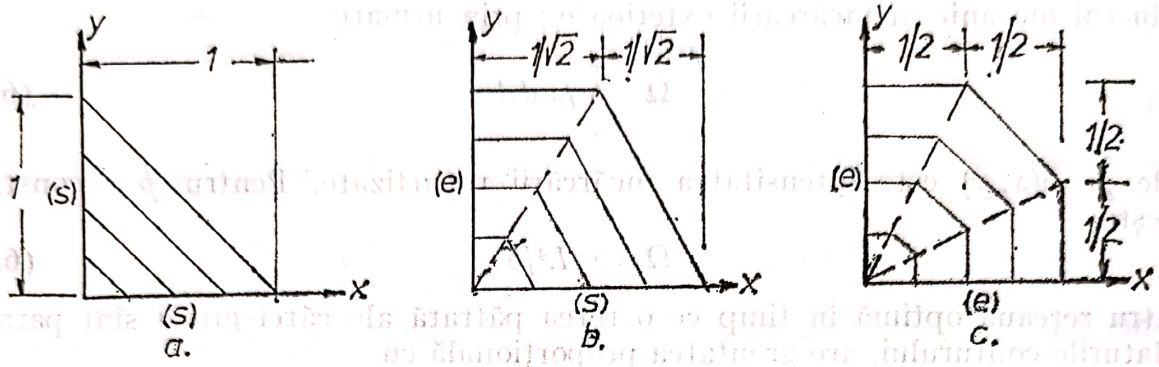


Fig. 6.5

optime este dată de relația (6.5). Pe figura 6.5 b rețeaua este încastrată în lungul axei $x=0$, simplu rezemată în lungul axei $y=0$ iar săgeata rețelei optime este dată de :

$$v(x,y)=(xy/\sqrt{2})-y^2/4 \quad \text{pentru} \quad y/x\leqslant\sqrt{2} \tag{6.18}$$

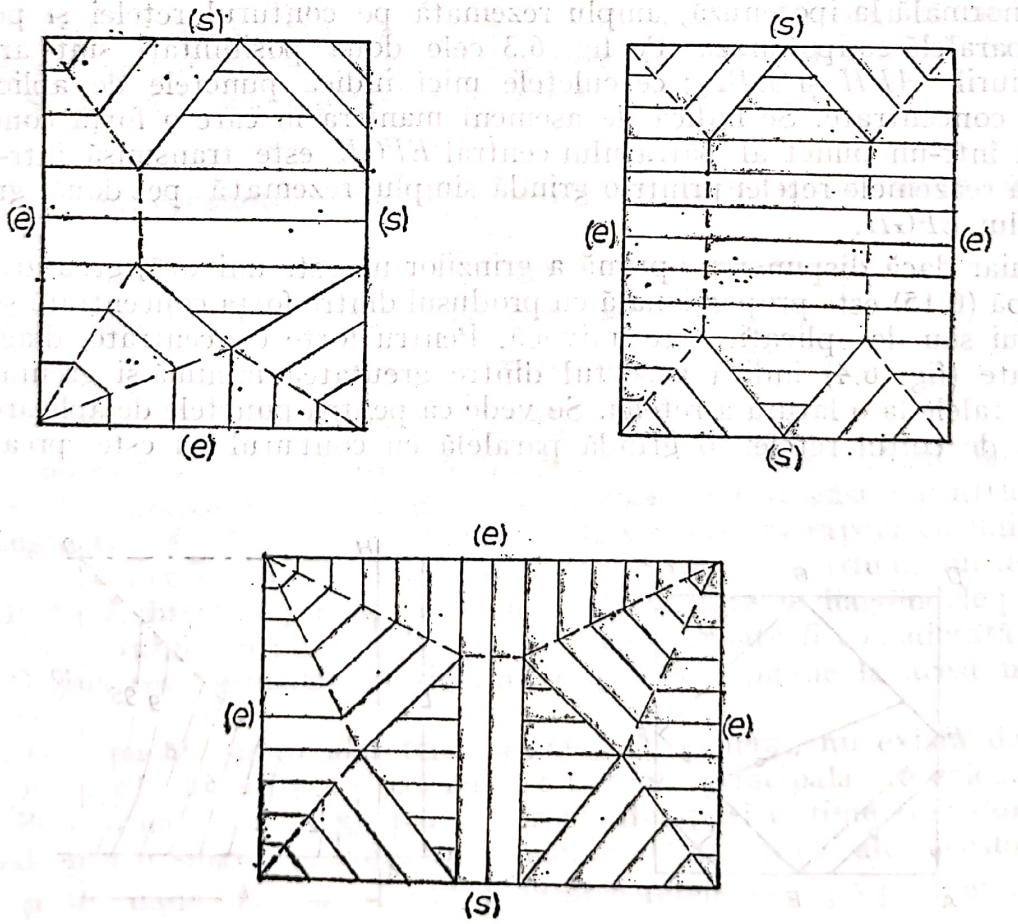


Fig. 6.6

$$v(x,y)=x^2/2 \qquad \text{pentru } y/x\geqslant\sqrt{2}$$

Pe figura 6.5 c rețeaua este încastrată în lungul laturilor $x=0$ și $y=0$ iar săgeata este dată de:

$$\begin{aligned} v(x,y)&=y^2/2 && \text{pentru } y/x\leqslant 1/2\\ v(x,y)&=-(x^2+y^2)/6+2xy/3 && \text{pentru } 1/2\leqslant y/x\leqslant 2\\ v(x,y)&=x^2/2 && \text{pentru } y/x\geqslant 2 \end{aligned} \qquad (6.19)$$

Informațiile fig. 6.5 și formulele (6.7), (6.18) și (6.19) permit determinarea dispunerii optime a grinzilor rețelelor dreptunghiulare ce au margini simplu rezemate sau încastrate. Fig. 6.6 arată cîteva exemple prezentate de G.I.N. Rozvany.

Contrar cazului marginilor simplu rezemate sau încastrate, dispunerea optimă a grinzilor în vecinătatea unei margini libere (1) depinde nu numai de tipul de rezemare a laturii adiacente dar și de maniera în care celelalte margini sînt rezemate. Pe fig. 6.7, condițiile de rezemare în vecinătatea colțurilor inferioare stîngi sînt aceleași, dar dispunerea optimă a grinzilor în vecinătatea acestor colțuri este diferită.

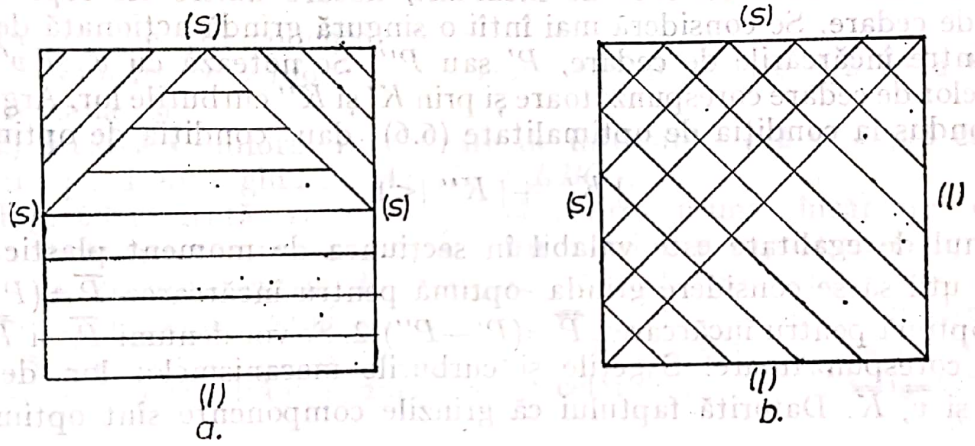


Fig. 6.7

6.1.5. Grinzile curbe nu sînt recomandate

Într-o regiune unde săgeata mecanismului de cedare este dată de un polinom de gradul doi în x și y, direcțiile principale de curbură sînt constante, ceea ce exclude grinzile curbe. Se ivește întrebarea dacă grinzile unei rețele optime sînt în mod necesar drepte. Se demonstrează în mod efectiv că grinzile curbe nu sînt recomandabile. Curburile K_x, K_y și torsiunea T în direcțiile axelor de coordonate se obțin cu ajutorul săgeții $v(x,y)$ din formulele:

$$K_x=-\partial^2 v/\partial x^2,\quad K_y=-\partial^2 v/\partial y^2,\quad T=-\partial^2 v/\partial x\partial y \qquad (6.20)$$

Din aceste relații rezultă condițiile de compatibilitate

$$\partial K_y/\partial_x-\partial T/\partial y=0,\quad \partial K_x/\partial y-\partial T/\partial x=0 \qquad (6.21)$$

Pentru a scrie condițiile de compatibilitate urmînd liniile principale de curbură, se observă că relațiile (6.21) iau forma ecuațiilor de echilibru dacă se înlocuiesc K_x, K_y și $-T$ prin eforturile unitare normale σ_y, σ_x și efortul unitar tangențial τ.

Ecuațiile de echilibru pentru rețeaua ortogonală a liniilor eforturilor unitare principale sînt

$$\partial\sigma_1/\partial s_1+(\sigma_1-\sigma_2)/\rho_2=0,\ \partial\sigma_2/\partial s_2+(\sigma_2-\sigma_1)/\rho_1=0 \tag{6.22}$$

unde s_1, s_2 sînt lungimile măsurate pe aceste linii iar ρ_1, ρ_2 sînt razele de curbură. Urmează că, pentru rețeaua liniilor principale de curbură, condițiile de compatibilitate sînt următoarele:

$$\partial K_2/\partial s_1+(K_2-K_1)/\rho_2=0,\ \partial K_1/\partial s_1+(K_1-K_2)/\rho_1=0 \tag{6.23}$$

unde s_1, s_2 sînt acum lungimile măsurate pe aceste linii iar ρ_1, ρ_2 sînt razele de curbură. Introducînd $K_1=\pm 1$ și $K_2\neq K_1$ rezultă din a doua ecuație (6.23) că ρ_1 este infinit. În consecință liniile curburii principale constante K_1 sînt drepte înafară de regiunile de tip S^+ și S^- unde $K_1=K_2$ și fiecare linie poate fi privită ca linie a curburii principale. Rezultă că o rețea optimă se poate întotdeauna construi cu grinzi drepte.

6.1.6. Rețea optimă pentru încărcări alternative

Se cercetează dispunerea optimă a grinzilor unei rețele care trebuie să suporte alternativ două sisteme de încărcări, fiecare dintre ele reprezentînd o încărcare de cedare. Se consideră mai întîi o singură grindă acționată de una sau de alta dintre încărcările de cedare, P' sau P''. Se notează cu v' și v'' săgețile mecanismelor de cedare corespunzătoare și prin K' și K'' curburile lor. Argumentele care au condus la condiția de optimalitate (6.6) dau condiția de optimalitate:

$$|K'|+|K''|\leqslant 1 \tag{6.24}$$

unde semnul de egalitate este valabil în secțiunea de moment plastic pozitiv.

Este util să se considere grinda optimă pentru încărcarea $\overline{P}=(P'+P'')/2$ și grinda optimă pentru încărcarea $\overline{\overline{P}}=(P'-P'')/2$. Se vor denumi $\overline{P}$ și $\overline{\overline{P}}$ grinzile optime corespunzătoare. Săgețile și curburile mecanismelor lor de cedare sînt $\overline{v}$, $\overline{K}$ și $\overline{\overline{v}}$, $\overline{\overline{K}}$. Datorită faptului că grinzile componente sînt optime, avem

$$|\overline{K}|\leqslant 1,\ |\overline{\overline{K}}|\leqslant 1 \tag{6.25}$$

Din aceste relații urmează că:

$$1/2\ |\overline{K}+\overline{\overline{K}}|+1/2\ |\overline{K}-\overline{\overline{K}}|\leqslant 1 \tag{6.26}$$

Comparația între (6.24) și (6.26) arată că săgețile

$$v'=(\overline{v}+\overline{\overline{v}})/2,\ v''=(\overline{v}-\overline{\overline{v}})/2 \tag{6.27}$$

definesc mecanismele de cedare ale căror curburi satisfac condiția de optimalitate (6.24) pentru încărcările alternative

$$P'=\overline{P}+\overline{\overline{P}},\ P''=\overline{P}-\overline{\overline{P}} \tag{6.28}$$

În consecință momentul plastic al grinzii optime pentru aceste încărcări alternative rezultă din suprapunerea momentelor plastice ale grinzilor componente. Pentru sisteme articulate acest principiu de suprapunere a fost găsit independent de W. S. Hemp și de J. C. Nagtegaal și W. Prager.

Exemplul următor arată aplicarea acestui principiu de suprapunere la o rețea pătrată simplu rezemată pe contur (fig. 6.8). Drept încărcări alternati-

ve se alege o încărcare uniform repartizată de intensitate p ce acționează pe dreptunghiul $AEGD$ în primul caz și pe dreptunghiul $EBCG$ în al doilea caz.

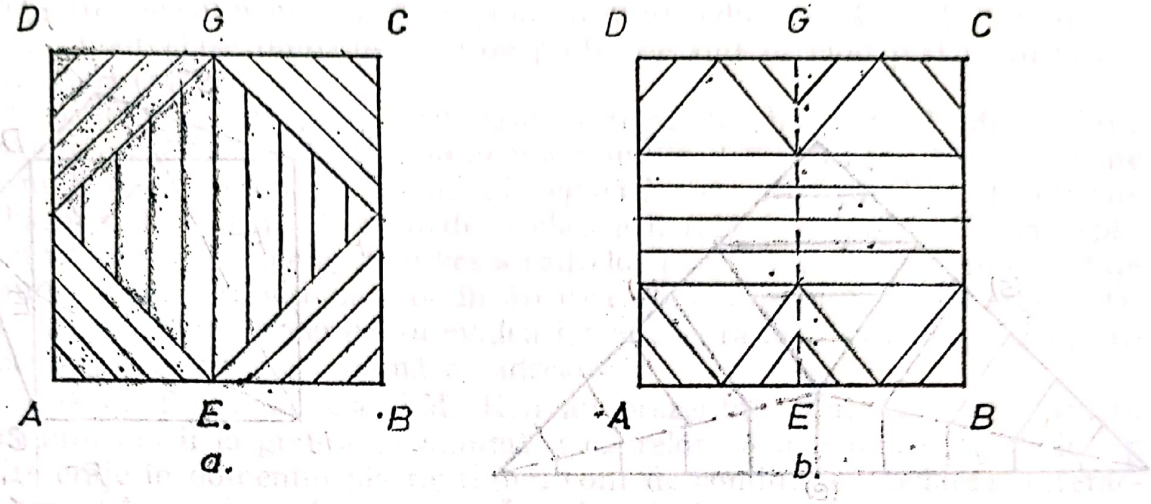


Fig. 6.8

Încărcările componente sînt:

1) o încărcare uniform repartizată de intensitate $p/2$ ce acționează pe toată rețeaua și

2) încărcări uniform repartizate de intensități $p/2$ și $-p/2$ ce acționează respectiv pe dreptunghiurile $AEGD$ și $EBCG$.

Fig. 6.8a arată rețeaua optimă pentru prima încărcare componentă. A doua încărcare componentă fiind antisimetrică în raport cu dreapta EG, mecanismul de cedare pentru dreptunghiul $AEGD$ corespunde la o simplă rezemare în lungul segmentului EG. Dispunerea optimă a grinzilor în dreptunghiurile $AEGD$ și $EBCG$ este cea arătată în fig. 6.8 b. Rețeaua optimă pentru încărcările alternative date rezultă din suprapunerea celor două rețele din fig. 6.8.

6.1.7. Rețele poligonale

Chiar dacă nu s-au tratat decît rețele dreptunghiulare, extinderea tehnicii prezentate la rețele poligonale oarecare nu prezintă dificultăți de principiu cu condiția ca fiecare latură a poligonului să fie simplu rezemată sau încastrată. Figura 6.9 care corespunde la fig. 6.5, arată, de exemplu, distribuția optimă a grinzilor în vecinătatea unui colț în unghi ascuțit iar fig. 6.10 aplică informațiile

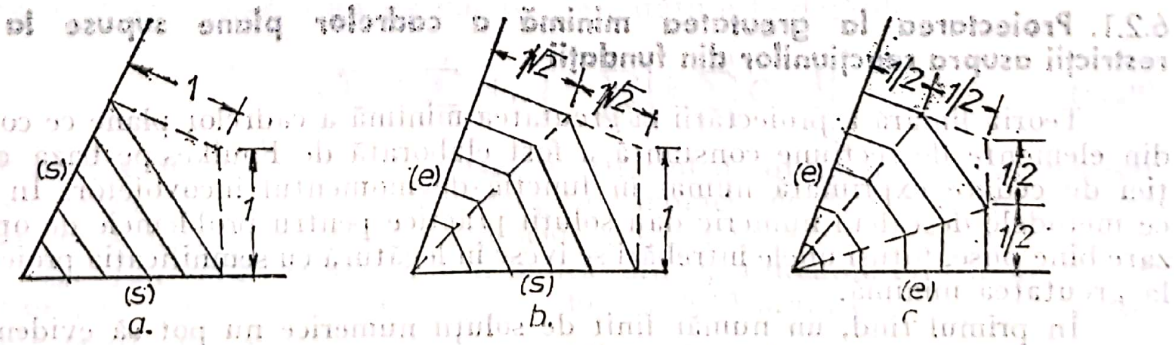


Fig. 6.9

din fig. 6.9 a și 6.9 b la o rețea în formă de triunghi isoscel ale cărui două laturii egale sînt simplu rezemate în timp ce a treia latură este încastrată.

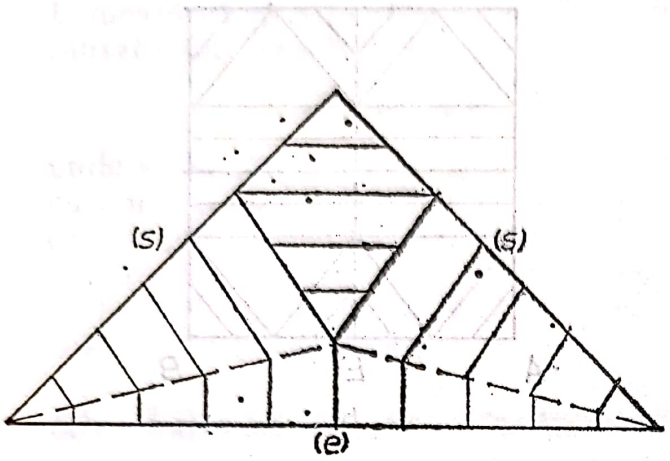


Fig. 6.10

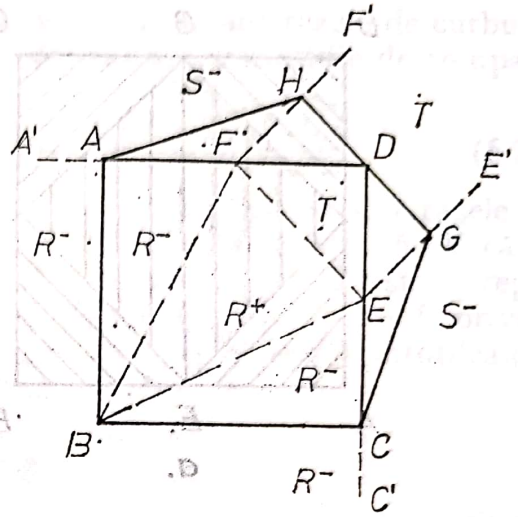


Fig. 6.11

Rămîn mai multe probleme de rezolvat și aici se menționează cele mai importante :

1) Ar fi bine de extins principiul suprapunerii din subcapitolul 6.1.6 la cazul mai multor încărcări alternative.

2) Cum s-a remarcat în legătură cu fig. 6.7 marginile libere sînt mai dificil de tratat decît marginile încastrate sau simplu rezemate. Pentru a ilustra această dificultate se consideră rețeaua pătrată $ABCD$ (fig. 6.11) care este încastrată în lungul ABC și liberă în lungul CDA și este acționată de o forță concentrată în D. După fig. 6.5c există regiuni de tipul R^- în BFA și BCE și o regiune de tipul R^+ în BEF. Fig. 6.11 reprezintă continuitatea cinematic admisibilă a acestor regiuni in afara conturului $ABCEF$: există regiuni de tipul S^- în $A'FF'$ și o regiune de tipul T în E' EFF'. Transmisia optimă corespunzătoare încărcării în D se face prin grinda GH simplu rezemată în G și H pe grinzile CG și AH care sînt încastrate în C și A. Din nefericire, această „soluție" iese din cadrul $ABCD$ prevăzut pentru rețea. Ar fi interesant de cunoscut dispunerea optimă a grinzilor unei rețele care nu depășește cadrul.

6.2 Proiectarea optimă a cadrelor plane în domeniul plastic

6.2.1. Proiectarea la greutatea minimă a cadrelor plane supuse la restricții asupra reacțiunilor din fundații

Teoria liniară a proiectării la greutatea minimă a cadrelor plane ce constau din elemente de secțiune constantă a fost elaborată de Foulkes pe baza condiției de cedare exprimată numai în funcție de momentul încovoietor. În timp ce metodele de calcul numeric dau soluții practice pentru problemele de optimizare bine puse, totuși unele întrebări se ivesc în legătură cu semnificația proiectării la greutatea minimă.

În primul rînd, un număr finit de soluții numerice nu pot să evidențieze nici aspectele intrinseci ale proiectării la greutatea minimă și nici defectele, dacă

teoria nu are o prezentare generală. În al doilea rînd, se poate obține o precizie nenecesară a optimizării comparativ cu precizia ipotezelor de bază. În al treilea rînd, pentru cadre rectangulare regulate, o parte dintre calculele inițiale necesare pentru a ajunge în vecinătatea soluției minime plecînd de la o soluție inițială arbitrară poate deveni nenecesară sau poate fi mult redusă dacă soluțiile analitice generale ale unor clase fundamentale de probleme sînt în mod just încorporate în procedeul de calcul.

Pentru structuri în cadre rectangulare regulate sînt posibil de obținut soluții generale nu numai pentru problema Foulkes dar și pentru alte probleme practice mult mai complexe. Utilizînd regularitatea configurației structurale R. Tanabashi și T. Nakamura au dedus o clasă generală de soluții în forma explicită și simplă pentru problema Foulkes a cadrelor plane înalte cu mai multe etaje și mai multe deschideri acționate de încărcarea utilă și de încărcări laterale relativ mari. Aceste soluții generale au evidențiat unele trăsături, avantaje și lipsuri ale proiectării la greutatea minimă a cadrelor.

Y. Yokoo, T. Nakamura și M. Keii au prezentat soluții generale pentru problema proiectării la greutatea minimă a cadrelor cu mai multe deschideri și mai multe etaje în domeniul plastic ținînd cont de condiția de cedare la interacțiunea moment încovoietor-forță axială. În subcapitolul prezent se prezintă extensia metodei analitice prezentată de T. Nakamura și T. Nagase a problemei de tip Foulkes pentru cadrele cu mai multe etaje și mai multe deschideri supuse la restricții asupra reacțiunilor din fundații. Deoarece forțele axiale din stîlpi sînt direct legate de reacțiunile de la baza stîlpilor apare natural și necesar să se introducă condiția de cedare la interacțiunea moment încovoietor — forță axială, în teorie. Dar aceasta nu se tratează aici și rămîne o problemă de rezolvat în context cu lucrarea amintită în sensul de mai sus.

a) **Formularea problemei**

Problema se formulează astfel: fiind dat un cadru plan rectangular regulat, avînd restricții asupra reacțiunilor de la baza fundației determinate din considerente economice și încărcări statice care-l acționează ca în fig. 6.12, care sînt momentele plastice de cedare la care se proiectează elementele astfel încît încărcările să fie preluate iar greutatea totală a cadrului exprimată liniar în funcție de momentele plastice de cedare să fie minimă ?

Costul fundațiilor nu este introdus în formulare pentru următoarele motive : este dificil de găsit o expresie generală și rezonabilă a costului fundației care să nu aibă nevoie de specificarea tipului de fundație și a condițiilor de fundare iar semnificația și precizia minimizării greutății cadrului poate fi considerabil diferită de minimizarea costului fundației lui. Fie $B_{j,k}$ și $C_{j,k}$ momentele plastice ale riglei și respectiv stîlpului k, indicate de la stînga, în etajul j al unui cadru cu f etaje și s deschideri (fig. 6.12) Funcția liniară a greutății este dată de

$$G = g\left[\sum_{k=1}^{s}\left(l_k \sum_{j=1}^{f} B_{j,k}\right) + \sum_{j=1}^{f}\left(h_j \sum_{k=1}^{s+1} C_{j,k}\right)\right] \tag{6.29}$$

Pentru a discuta problema duală și criteriul de optimalitate este necesar să se scrie ecuațiile de echilibru în funcție de momentele de încastrare perfectă ale grinzilor și momentele din extremitățile stîlpilor notate cu $\{b^L_{j,k},\ b^R_{j,k}\}$ și respectiv $\{c^B_{j,k},\ c^T_{j,k}\}$, unde indicii L și R indică stînga și dreapta grinzii iar B și T părțile de jos, respectiv sus ale stîlpilor. Figura 6.13 arată convenția de semne adoptată pentru $b_{j,k}$ și $c_{j,k}$

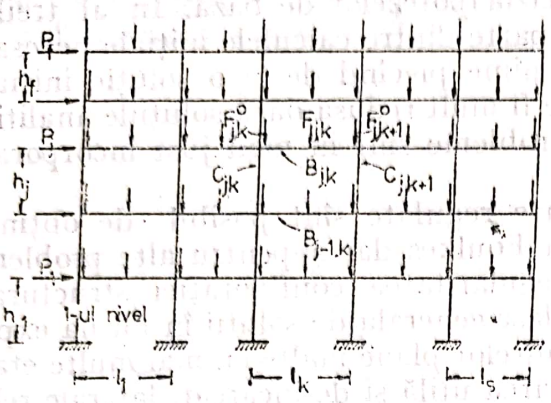


Fig. 6.12

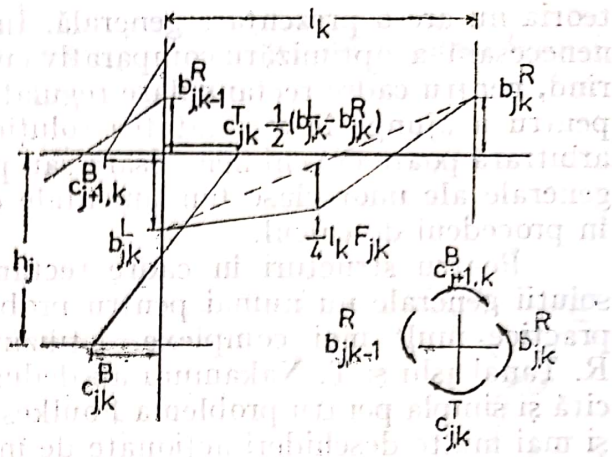


Fig. 6.13

$$\sum_{k=k}^{s+1}(C^B_{j,k}+C^T_{j,k})=h_jQ_j \tag{6.30a}$$

$$b^L_{j,k}+b^R_{j,k-1}-C^B_{j+1,k}-C^T_{j,k}=0 \tag{6.30b}$$

unde

$$Q_j=\sum_{i=1}^{f}P_i \tag{6.31}$$

Aici P_i este încărcarea laterală aplicată nodului etajului i dinspre stînga (fig. 6.12). În tratare $k=1, 2, ..., s$ în cazul riglelor, $k=1, 2, ..., s+1$, în cazul nodurilor, stîlpilor și fundațiilor, $j=1, 2, ..., f$. $F_{j,k}$ și $F^0_{j,k}$ sînt forțele de proiectare aplicate în mijlocul riglei k și respectiv în nodul k al etajului j. Condițiile de cedare ale secțiunilor din extremitățile și mijlocul elementelor sînt următoarele

$$B_{j,k}\mp b^L_{j,k}\geqq 0, \quad B_{j,k}\pm b^R_{j,k}\geqq 0 \tag{6.32a—d}$$

$$2B_{j,k}-b^L_{j,k}+b^R_{j,k}\geqq\frac{1}{2}l_lF_{j,k} \tag{6.32e}$$

$$C_{j,k}\mp c^B_{j,k}\geqq 0, \quad C_{j,k}\mp c^T_{j,k}\geqq 0 \tag{6.32f—i}$$

unde s-a considerat $F_{j,k}\geqslant 0$. R^c_k și R^P_k sînt limitele admisibile la compresiune respectiv la tracțiune ale fundației k măsurate de la stînga. Reacțiunea reală a fundației k este indicată de la stînga. Reacțiunea reală a fundației k sub acțiunea încărcărilor de proiectare este notată cu R_k.

În cele ce urmează reacțiunile de compresiune sînt considerate pozitive.

Deoarece R_k se poate scrie astfel:

$$R_k=\sum_{j=1}^{f}\{(b^L_{j,k-1}+b^R_{j,k-1})/l_{k-1}-(b^L_{j,k}+b^R_{j,k})/l_k\}+\frac{1}{2}(F_{k-1}+F_k)+F^0_k \tag{6.33}$$

unde

$$F_k=\sum_{j=1}^{f}F_{j,k} \quad \text{și} \quad F^0_k=\sum_{j=1}^{f}F^0_{j,k} \tag{6.34}$$

restricțiile reacțiunilor devin:

$$R_k\leqq R^c_k, \quad R_k\geqq -R^P_k \tag{6.35a, b}$$

În timp ce momentele de cedare plastică sînt în mod necesar nenegative

$$B_{j,k} \geqq 0 \; ; \; C_{j,k} \geqq 0 \qquad \text{(6.36a,b)}$$

momentele reale $b^L_{j,k}$, $b^R_{j,k}$, $c^B_{j,k}$, $c^T_{j,k}$ și reacțiunile reale sînt așa numitele *variabile libere* al căror semn poate fi oricare.

Problema de proiectare la greutate minimă a cadrului supus la restricții asupra reacțiunilor din fundații se formulează astfel :

Să se minimizeze (6.29)

supusă la (6.30a, b), (6.32a, i), (6.33), (6.35 a, b), (6,36 a, b).

Această problemă va fi denumită primală.

b) Aplicarea teoremei de complementaritate de relaxare

H. S. Y. Chan a arătat, pentru problema lui Foulkes ce implică două tipuri de încărcare, că problema dual ă ce corespunde situației statice conduce foarte natural la o condiție de mecanism Foulkes extinsă. Această tehnică bazată pe teorema de complementaritate de relaxare a programării liniare se aplică problemei primale enunțate anterior și se deduce o condiție de mecanism Foulkes în forma extinsă.

Variabilele cinematice corespunzătoare restricțiilor statice (6.30a), (6.30 b) (6.32 a—e), (6.32 f—i), (6.33) și (6.35a, b) sînt notate cu γ_i ; $\Psi_{j,k}$ $(k=1, 2, \ldots, s+1)$; $\Phi^{L+}_{j,k}$, $\Phi^{L-}_{j,k}$, $\Phi^{R+}_{j,k}$, $\Phi^{R-}_{j,k}$, $\Phi^{M}_{j,k}$ $(k=1, 2, \ldots, s)$; $\theta^{B+}_{j,k}$, $\theta^{B-}_{j,k}$, $\theta^{T+}_{j,k}$, $\theta^{T-}_{j,k}$ $(k=1, 2, \ldots, s+1)$ și respectiv ν_k, ν^+_k, ν^-_k $(k=1, 2, \ldots, s+1)$ unde $j=1, 2, \ldots, f$. Problema dual ă se formulează astfel :

Să se maximizeze :

$$D_c = \Theta\left[\sum_{j=1}^{f} h_j Q_j \gamma_j + \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{f} \frac{1}{2} l_k F_{j,k} \Phi^M_{j,k} + \sum_{k=1}^{s+1}\left[\left\{\frac{1}{2}(F_{k-1}+F_k)+F^0_k\right\}\nu_k - R^c_k \nu^+_k - R^P_k \nu^-_k\right]\right] \qquad (6.37)$$

supusă la

$$\Phi^{L+}_{j,k},\ \Phi^{L-}_{j,k},\ \Phi^{R+}_{j,k},\ \Phi^{R-}_{j,k},\ \Phi^{M}_{j,k} \geqq 0 \qquad \text{(6.38a—e)}$$

$$\theta^{B+}_{j,k},\ \theta^{B-}_{j,k},\ \theta^{T+}_{j,k},\ \theta^{T-}_{j,k} \geqq 0 \qquad \text{(6.38f—i)}$$

$$\nu^+_k,\ \nu^-_k \geqq 0 \qquad \text{(6.39a, b)}$$

$$(\Phi^{L+}_{j,k}+\Phi^{L-}_{j,k})+(\Phi^{R+}_{j,k}+\Phi^{R-}_{j,k})+2\Phi^{M}_{j,k} \leqq \Theta l_k \qquad \text{(6.49a)}$$

$$(\theta^{B+}_{j,k}+\theta^{B-}_{j,k})+(\theta^{T+}_{j,k}+\theta^{T-}_{j,k}) \leqq \Theta h_j \qquad \text{(6.40b)}$$

$$\Psi_{j,k}-(\Phi^{L+}_{j,k}-\Phi^{L-}_{j,k})-\Phi^{M}_{j,k}+(\nu_k-\nu_{k+1})/l_k=0 \qquad \text{(6.41a)}$$

$$\Psi_{j,k+1}-(\Phi^{R+}_{j,k}-\Phi^{R-}_{j,k})+\Phi^{M}_{j,k}+(\nu_k-\nu_{k+1})/l_k=0 \qquad \text{(6.41b)}$$

$$\gamma_j-\Psi_{j-1,k}-(\theta^{B+}_{j,k}-\theta^{B-}_{j,k})=0 \qquad \text{(6.41c)}$$

$$\gamma_j-\Psi_{j,k}-(\theta^{T+}_{j,k}-\theta^{T-}_{j,k})=0 \qquad \text{(6.41d)}$$

$$\nu_k-(\nu^+_k-\nu^-_k)=0 \qquad \text{(6.41e)}$$

unde γ_j, $\Psi_{j,k}$ și ν_k sînt *variabile libere*, iar $\Theta>0$ și $\Theta^2=g$.

Condițiile ce caracterizează teorema de complementaritate de relaxare pentru soluțiile admisibile de optim ale sistemelor primal și dual definite mai sus sînt denumite criterii de optimalitate.

Scanned with OKEN Scanner

Din criteriul de optimalitate ce corespunde la (6.32 a—i) și (6.38 a—i) se poate vedea că $2\Phi^M_{j,k}$ și

$$\Phi^L_{i,k}=\Phi^{L+}_{i,k}-\Phi^{L-}_{j,k},\quad \Phi^R_{j,k}=\Phi^{R+}_{j,k}-\Phi^{R-}_{j,k},\quad \theta^B_{s,k}=\theta^{B+}_{j,k}-\theta^{B-}_{j,k},\quad \theta^T_{j,k}=\theta^{T+}_{j,k}-\theta^{T-}_{j,k} \tag{6.42}$$

ce trebuie să fie interpretate ca fiind rotirile articulațiilor plastice la mijlocul și în extremitățile din stînga și dreapta ale riglei k, respectiv la extremitățile de jos și de sus ale stîlpului k al etajului j.

Din criteriul de optimalitate ce corespunde la (6.35 a, b) și (6.39 a, b)

$$(R_k-R^c_k)\,\nu^+_k=0 \tag{6.43a}$$

și

$$(R_k+R^P_k)\,\nu^-_k=0 \tag{6.43b}$$

apare ca ν_k dat de (6.41 e) trebuie să fie interpretat ca fiind deplasarea verticală a fundației k. Dacă $R_k=R^c_k$, atunci $\nu_k=\nu^+_k$ reprezintă o deplasare în jos (tasare) în timp ce dacă $R_k=-R^P_k$, atunci $\nu_k=-\nu^-_k$ reprezintă o deplasare în sus.

Criteriul de optimalitate ce corespunde la (6.36 a, b) și (6.40 a, b) poate fi scris în funcție de mărimile definite de (6.42) astfel :

$$B_{j,k}(|\,\Phi^L_{j,k}\,|+|\,\Phi^R_{j,k}\,|+2\Phi^M_{j,k}-\Theta l_k)=0 \tag{6.14a}$$

$$C_{j,k}(|\,\theta^B_{j,k}\,|+|\,\theta^T_{j,k}\,|-\Theta h_j)=0 \tag{6.44b}$$

Deoarece

$$|\,\Phi^L_{j,k}\,|+|\,\Phi^R_{j,k}\,|+2\Phi^M_{j,k}\equiv\beta_{j,k} \tag{6.45a}$$

și

$$|\,\theta^B_{j,k}\,|+|\,\theta^T_{j,k}\,|\equiv\xi_{j,k} \tag{6.45b}$$

reprezintă suma rotațiilor articulațiilor plastice respectiv din grindă și stîlpul k al etajului j, iar ecuațiile (6.45 a, b) exprimă condițiile clasice ale mecanismului Foulkes. Se poate concluziona acum că mecanismul Foulkes extins pentru problema prezentată este definit de (6.43 a, b), (6.44 a, b) și egalitățile (6.41 a—d), care pot fi în forma :

$$\Phi^L_{j,k}=\Psi_{j,k}-\Phi^M_{j,k}+(\nu_k-\nu_{k+1})/l_k \tag{6.46a}$$

$$\Phi^R_{j,k}=\Psi_{j,k+1}+\Phi^M_{j,k}+(\nu_k-\nu_{k+1})/l_k \tag{6.46b}$$

$$\theta^B_{j,k}=\gamma_j-\Psi_{j-1,k} \tag{6.46c}$$

$$\theta^T_{j,k}=\gamma_i-\Psi_{j,k} \tag{6.46d}$$

Se notează că oriunde restricțiile reacțiunilor sînt active, rotirile articulațiilor respective trebuie să includă efectul deplasărilor verticale corespunzătoare, ca în fig. 6.14.

Condițiile pentru mecanismul Foulkes extins fiind stabilite, devine posibilă aplicarea raționamentului pur structural al lui W. Prager pentru demonstrarea suficienței. Se face observația că există o relație între teorema de dualitate formulată pentru problema pusă și demonstrația pur structurală.

Pentru soluțiile optime ale problemelor primală și duală, $F=\{B_{j,k},\ C_{j,k},\ b^L_{j,k},\ b^R_{j,k},\ c^B_{j,k},\ c^T_{j,k},\ R_k\}$ și $v=\{\gamma_i,\ \Psi_{j,k},\ \Phi^L_{j,k},\ \Phi^M_{j,k},\ \Phi^R_{j,k},\ \theta^B_{j,k},\ \theta^T_{j,k},\ \nu_k\}$

$$g\left[\sum_{k=1}^{s}\left(l_k\sum_{j=1}^{f}B_{j,k}\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(h_j\sum_{k=1}^{s+1}C_{j,k}\right)\right]=\Theta\left[D_1-\sum_{k=1}^{s+1}(R^c_k\,\nu^+_k+R^P_k\,\nu^-_k)\right] \tag{6.47}$$

unde D_1 indică primii trei termeni din parantez acoladă a expresiei lui D dat de relația (6.37). Dacă se substituie condițiile lui Foulkes (6.44a, b) în membrul

stîng al relației (6.47) și se utilizează simbolurile definite de (6.45 a, b), atunci rezultă ecuația

$$\sum_{j=1}^{f}\left\{\sum_{k=1}^{s}\beta_{j,k}\,B_{j,k}+\sum_{k=1}^{s+1}\xi_{j,k}\,C_{j,k}\right\}=D_1-\sum_{k=1}^{s+1}\left(R_k^c v_k^+ + R_k^P v_k^-\right) \tag{6.48}$$

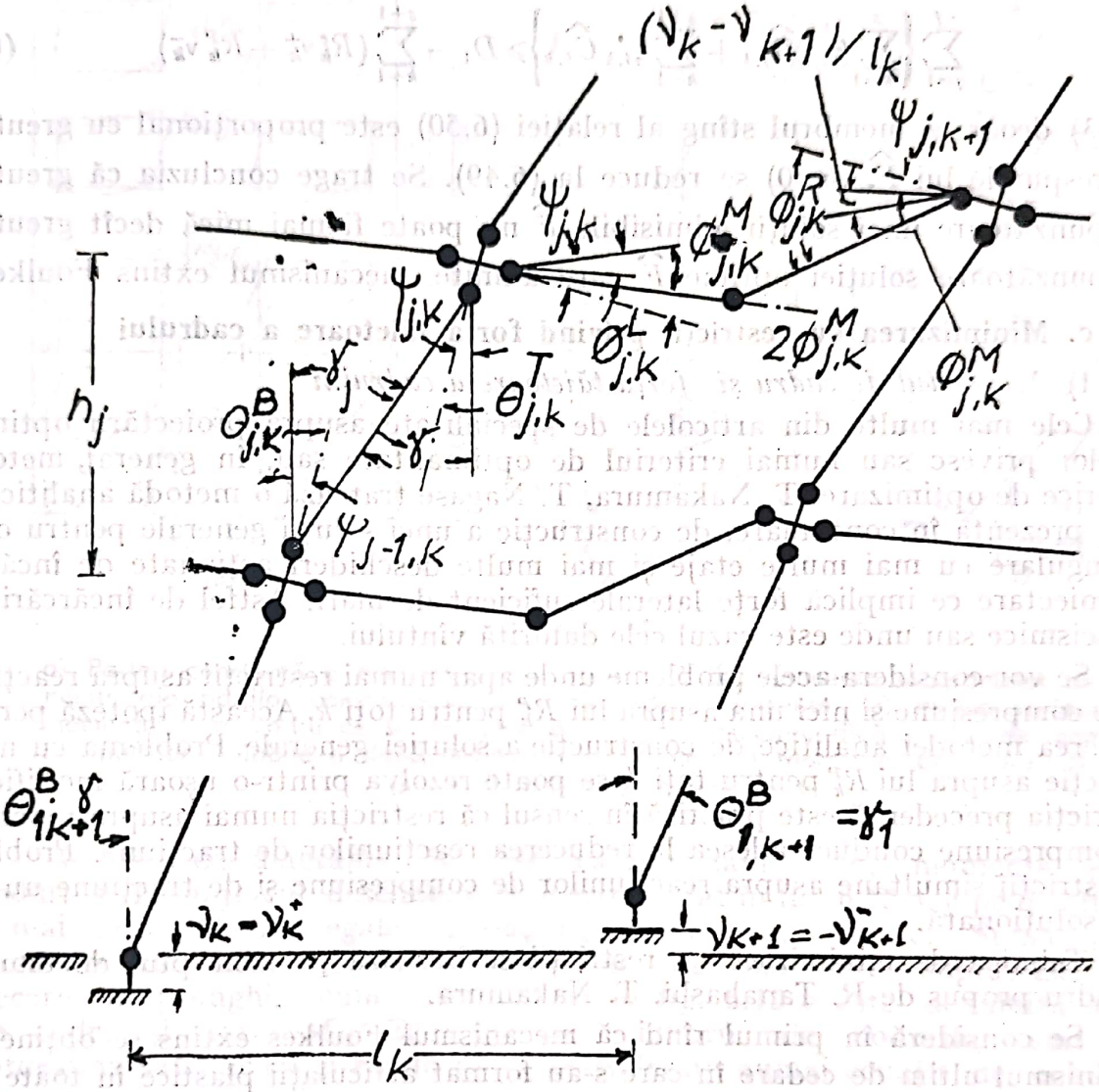


Fig. 6.14

care reprezintă expresia cunoscută a lucrului mecanic virtual. În membrul drept, termenul D_1 reprezintă lucrul mecanic virtual al acțiunilor interioare de proiectare, ceilalți doi termeni, lucrul mecanic virtual al reacțiunilor, iar membrul stîng, lucrul mecanic virtual al momentelor plastice, efectuat de sistemul de deplasări compatibil și rotirile articulațiilor ce satisfac condițiile de mecanism Foulkes extins. Pentru o soluție admisibilă arbitrară a problemei primale, $\hat{F}=\{\hat{B}_{j,k}, \hat{C}_{j,k}, \hat{b}^L_{j,k}, \hat{b}^R_{j,k}, \hat{c}^B_{j,k}, \hat{c}^T_{j,k}, \hat{R}_k\}$, și soluția optimă a problemei duale, v,

$$g\left[\sum_{k=1}^{s}\left(l_k\sum_{j=1}^{f}\hat{B}_{j,k}\right)+\sum_{j=1}^{f}\left(h_j\sum_{k=1}^{s+1}\hat{C}_{j,k}\right)\right]\geqslant\Theta\left[D_1-\sum_{k=1}^{s+1}\left(R_k^c v_k^+ + R_k^P v_k^-\right)\right] \tag{6.49}$$

Raționamentul pur structural pentru demonstrarea suficienței este următorul : 1) ecuația de lucru mecanic virtual (6.48) este legată de greutate prin utilizarea condiției de mecanism Foulkes extins și este exprimată prin (6.47) ; ecuația de lucru mecanic virtual efectuat de sistemul de momente plastice, acțiuni interioare și reacțiuni, F, pe sistemul de deplasări și rotiri ale articulațiilor ce satisfac condiția de mecanism Foulkes extins se poate reduce astfel :

$$\sum_{j=1}^{f}\left\{\sum_{k=1}^{s}\beta_{j,k}\hat{B}_{j,k}+\sum_{k=1}^{s+1}\xi_{j,k}\hat{C}_{j,k}\right\}\geq D_1-\sum_{k+1}^{s+1}(R_k^e v_k^+ + R_k^P v_k^-) \qquad (6.50)$$

3) deoarece membrul stîng al relației (6.50) este proporțional cu greutatea ce corespunde lui $\hat{F}$, (6.50) se reduce la (6.49). Se trage concluzia că greutatea corespunzătoare unei soluții admisibile $\hat{F}$ nu poate fi mai mică decît greutatea corespunzătoare soluției optime $\hat{F}$ care admite mecanismul extins Foulkes v.

c. Minimizarea cu restricții privind forța tăietoare a cadrului

1) *Momentul de cadru și forța tăietoare a cadrului*

Cele mai multe din articolele de specialitate asupra proiectării optime a cadrelor privesc sau numai criteriul de optimalitate sau, în general, metodele numerice de optimizare. T. Nakamura, T. Nagase tratează o metodă analitică, ce se va prezenta în continuare, de construcție a unei soluții generale pentru cadre rectangulare cu mai multe etaje și mai multe deschideri acționate de încărcări de proiectare ce implică forțe laterale suficient de mari. Astfel de încărcări sînt cele seismice sau unde este cazul cele datorită vîntului.

Se vor considera acele probleme unde apar numai restricții asupra reacțiunilor de compresiune și nici una asupra lui R_k^P pentru toți k. Această ipoteză permite obținerea metodei analitice de construcție a soluției generale. Problema cu nici o restricție asupra lui R_k^P pentru toți k se poate rezolva printr-o ușoară modificare. Restricția precedentă este practică în sensul că restricția numai asupra reacțiunii de compresiune conduce adesea la reducerea reacțiunilor de tracțiune. Problema cu restricții simultane asupra reacțiunilor de compresiune și de tracțiune nu este încă soluționată.

Tehnica de minimizare cu restricții se bazează pe conceptul de moment de cadru propus de R. Tanabashi, T. Nakamura.

Se consideră în primul rînd că mecanismul Foulkes extins se obține din mecanismul ultim de cedare în care s-au format articulații plastice în toate secțiunile din extremitățile elementelor cadrului, prin urmare

$$b_{j,k}^L=b_{j,k}^R=B_{j,k},\quad C_{j,k}^B=C_{j,k}^T=C_{j,k} \qquad (6.51)$$

în care articulații plastice se pot forma în secțiunile critice din mijlocul mai multor grinzi, nesituate însă în traveea de deschidere minimă.

Soluția de greutate minimă a problemei reduse bazate pe ipoteza (6.51) se determină sub forma analitică și se arată că este soluția, sub anumite restricții asupra încărcărilor de proiectare și geometriei cadrului, problemei *inițiale* (cu restricții numai asupra reacțiunilor de compresiune).

Diagrama momentelor încovoietoare ale cadrului ce corespunde mecanismului de cedare menționat poate fi privită ca rezultat al suprapunerii celor $2fs$ diagrame descompuse din fig. 6.15.

Scanned with OKEN Scanner

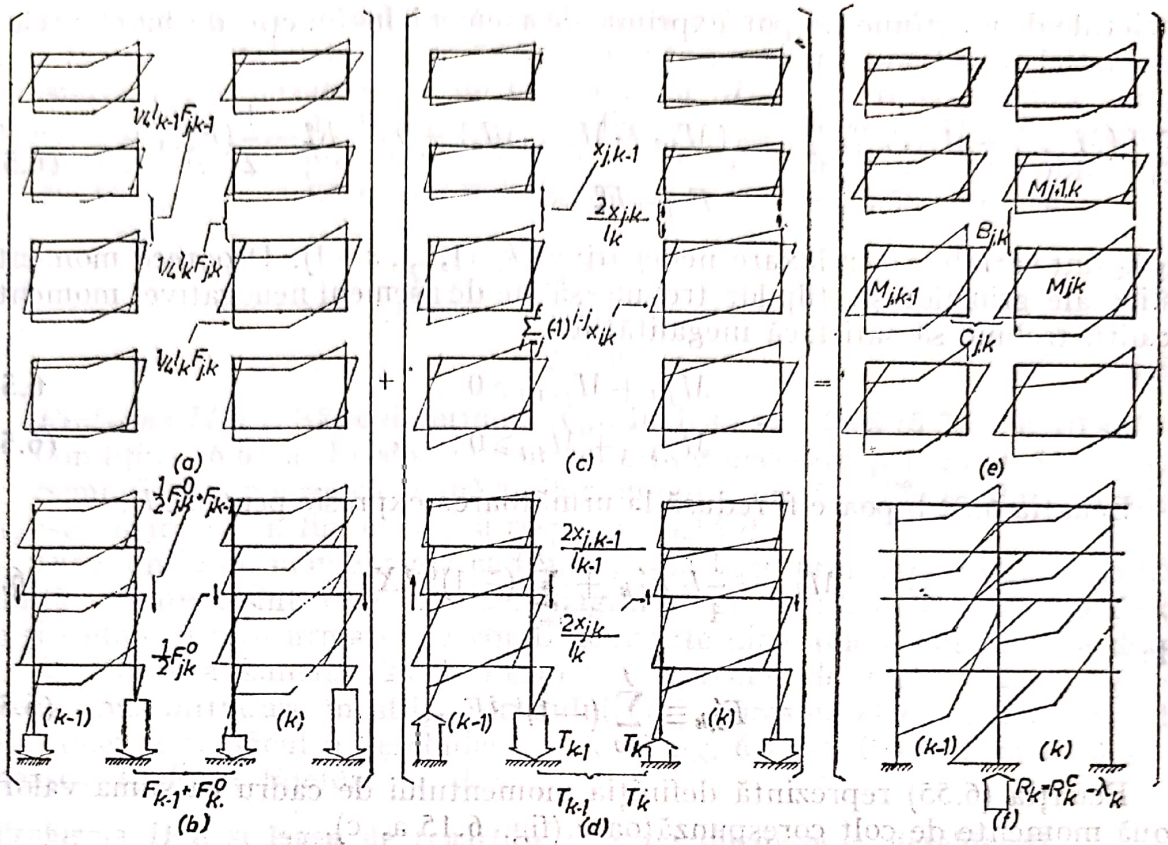


Fig. 6.15

a) Partea constantă a momentului de cadru ; b) Suprapunerea diagramelor de momente ale părților constante a două deschideri adiacente ; c) Partea variabilă a momentului de cadru ce se proiectează ; d) Suprapunerea diagramelor de momente ale părților variabile a două deschideri adiacente ; e) Momentul de cadru ; f) Diagrama de momente încovoietoare.

O clasă de diagrame *fs* este caracterizată prin, momente egale la noduri și la mijlocul deschiderii cum este arătat în fig. 6.15 a și pe de alta parte, numai de momente egale la noduri, ca în fig. 6.15 c. Suma a două momente de nod, asociate diagramele de momente suprapuse pentru fiecare dreptunghi, cum este arătat în fig. 6.15 e este denumită moment de cadru și notat M_{jk}. Ecuațiile de echilibru ale nodurilor sînt atunci totdeauna satisfăcute și rămîn să fie considerate numai ecuații de echilibru de moment, scrise în forma :

$$\sum_{k=1}^{s} M_{j,k} = \frac{1}{4} h_j Q_j \qquad (6.52a)$$

Deoarece suma perechilor de momente de nod a două etaje adiacente (fig. 6.15 e) este legată de valoarea momentului maxim din grindă, condiția ca momentul din mijlocul deschiderii să nu depășească sau să fie egal cu momentele din extremități devine

$$M_{j,k} + M_{j+1,k} = \frac{1}{4} l_k F_{j,k} + X_{j,k} \qquad (6.52b)$$

unde variabilele de relaxare $X_{j,k} \geqslant 0$ $(j=1, 2, ..., f:\ k=1, 2, ..., s)$ reprezintă evident suma perechilor de momente de nod a două etaje adiacente (fig. 6.15 c).

Restricțiile de reacțiune se pot exprima de asemeni în funcție de momentele de cadru astfel :

$$2\sum_{j=1}^{f}\{(M_{j,k-1}+M_{j+1,k-1})/l_{k-1}-(M_{j,k}+M_{j+1,k})/l_k\}+\lambda_k=R_k^c-\frac{1}{2}(F_{k-1}+F_k)-F_k^0 \tag{6.52c}$$

unde λ_k sînt variabile de relaxare nenegative ($k=1, \ldots, s+1$). Deoarece momentele plastice ale grinzilor și stîlpilor trebuie să fie de asemeni nenegative, momentele de cadru trebuie să satisfacă inegalitățile

$$M_{j,k}+M_{j+1,k}\geqslant 0 \tag{6.54a}$$

$$M_{j,k-1}+M_{j,k}\geqslant 0 \tag{6.54b}$$

Ecuația 6.52 b poate fi redusă la următoarea expresie pentru M :

$$M_{j,k}=\frac{1}{4}l_kF'_{j,k}+\sum_{i=j}^{f}(-1)^{i-j}X_{i,k} \tag{6.57}$$

unde

$$F'_{j,k}\equiv\sum_{i=j}^{f}(-1)^{i-j}F_{i,k}. \tag{6.58a}$$

Ecuația (6.55) reprezintă definiția momentului de cadru ca suma valorilor a două momente de colț corespunzătoare (fig. 6.15 a, c).

Problema de proiectare la greutatea minimă cu restricții asupra reacțiunilor se poate formula în funcție numai de variabilele X_{jk} și λ_k, cum urmează :

Problema I

Să se minimizeze

$$G=g\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f}h_j^2Q_j+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{s}l_k^2(F_k+2T_k)\right] \tag{6.57}$$

supusă la

$$\sum_{k=1}^{s}X_{j,k}=M_j \tag{6.58a}$$

$$T_{k-1}-T_k+\lambda_k=W_k \tag{6.58b}$$

$$\frac{1}{4}(l_{k-1}F'_{j,k-1}+l_kF'_{j,k})+\sum_{i=j}^{f}(-1)^{i-j}(X_{i,k-1}+X_{i,k})\geqslant 0 \tag{6,58c}$$

$$X_{j,k}\geqslant 0 \tag{6.58d}$$

$$\lambda_k\geqslant 0 \tag{6.58e}$$

unde

$$T_k\equiv 2\sum_{j=1}X_{j,k}/l_k \qquad k=(1, 2, \ldots, s) \tag{6.59}$$

și unde

$$M_j=\frac{1}{4}\left(h_jQ_j+h_{j+1}Q_{j+1}-\sum_{k=1}^{s}l_kF_{j,k}\right) \qquad j=(1, 2, .., f) \tag{6.60a}$$

$$W_k=R_k^c-(F_{k-1}+F_k^0) \qquad (k=1, 2, \ldots, s+1) \tag{6.60b}$$

Din (6.58 a) și (6.58 d) apare că nu există nici o soluție admisibilă în afara de cazul $M_j \geqslant 0$. T. Tanabashi și T. Nakamura au arătat că deoarece variația lui $F_{j,k}$ de la etaj la etaj este foarte mică în multe probleme practice în comparație cu creșterea corespunzătoare a lui Q_j, condiția $M_j \geqslant 0$ va fi satisfăcută aproape întotdeauna cînd $M_f \geqslant 0$. Aici se vor studia problemele unde $M_j \geqslant 0$ pentru toți j. În această situație problema pusă se descompune în două subprobleme:

Problema II a: Să se minimizeze (6.57) supusă la (6.58 b, e), și

$$\sum_{k=1}^{s} l_k T_k = 2 \sum_{k=1}^{f} M_j = M \tag{6.61a}$$

$$T_k \geqslant 0 \tag{6.61b}$$

Problema II b: Să se determine $X_{j,k}$, încît să satisfacă (6.58 a, c, d) și (6.59) Condițiile (6.61 a, b) sînt numai condițiile necesare pentru (6.58 a, d).

Semnificația mecanică a mărimilor sumate din F_k, F_k^0 și din Problema II a este marcată în fig. 6.15 b și respectiv 6.15 d.

Diagramele de moment ale cadrului f rezultate prin suprapunere pentru o anumită valoare k sînt asemănătoare diagramei unui cadru cu o singură deschidere și f etaje și prin urmare ele vor fi denumite diagrame de moment a deschiderii k. Mărimea sumată T_k reprezintă o pereche de forțe axiale egale și de sens opus introduse în stîlpii primului etaj corespunzător părții variabile a diagramei de moment a deschiderii k, ca în fig. 6.15 d. Pare rațional să se denumească T_k forță tăietoare a deschiderii k.

d) Problema II a și legea de repartiție a forței tăietoare a deschiderii

Deoarece există $(s+2)$ relații (6.58 b) și (6.61 a) pentru $(2s+1)$ necunoscute T_k și λ_k, se aleg în mod corespunzător $(s+2)$ variabile de bază ce sînt exprimate în funcție de cele $(s-1)$ variabile rămase. Soluția R. Tanabashi, T. Nakamura, fără restricții asupra reacțiunilor, cere ca forța tăietoare a deschiderii să fie determinată numai pentru deschiderea minimă în timp ce T_k pentru toate celelalte deschideri este zero. Cu alte cuvinte, diagrama momentului cadrului pentru deschiderea minimă constă din părțile constante și variabile din fig. 6.15 b și 6.15 d, în timp ce pentru toate celelalte deschideri constă numai din partea constantă.

Dacă reacțiunea de compresiune cea mai mare (ce apare evident în partea opusă acțiunii vîntului la baza deschiderii minime) depășește restricția de reacțiune corespunzătoare, este necesar să se distribuie forța tăietoare la alte deschideri pînă ce restricția de reacțiune este satisfăcută. Dacă $\lambda_{p+1}=0$, $R_{p+1}=R_{p+1}^c$ atunci distribuția trebuie să se facă în deschiderea p, $T_p>0$. Cu alte cuvinte, dacă λ_{p+1} este aleasă ca variabilă din afara bazei, T_p trebuie să fie luată drept variabilă bază. Considerînd cele de mai sus, perechea $\{T_p, \lambda_p\}$ poate fi introdusă printre variabilele bază sau din afara bazei ca în fig. 6.16. Se presupune în fig. 6.16 că forța tăietoare a fost deja distribuită deschiderilor umbrite iar bazele cu asterisc au atins limitele valorilor lor.

Se notează cu N următoarea submulțime a lui $K=\{1, 2, ..., s\}$, a mulțimii indicilor tuturor numerelor deschiderilor:

$$N=\{\alpha(1), \alpha(1)+1, ...\omega(1) ; ... ; \alpha(i)+1, ..., \omega(i); ...; \alpha(n), \alpha(n)+1, ..., \omega(n)\} \tag{6.62}$$

unde $\alpha(i)$, $\alpha(i)+1$, ..., $\omega(i)$ indică o serie de numere consecutive de deschideri de la $\alpha(i)$ la $\omega(i)$. Metoda de construcție a lui N se va arăta mai tîrziu. $\alpha(r)+\tau$

este un indice particular pentru o singură deschidere în N a cărei reacțiune opusă acțiunii vîntului nu a atins valoarea limită (fig. 6.16). N^- indică submulțimea lui N ce exclude numai $\alpha(r)+\tau$ din N.

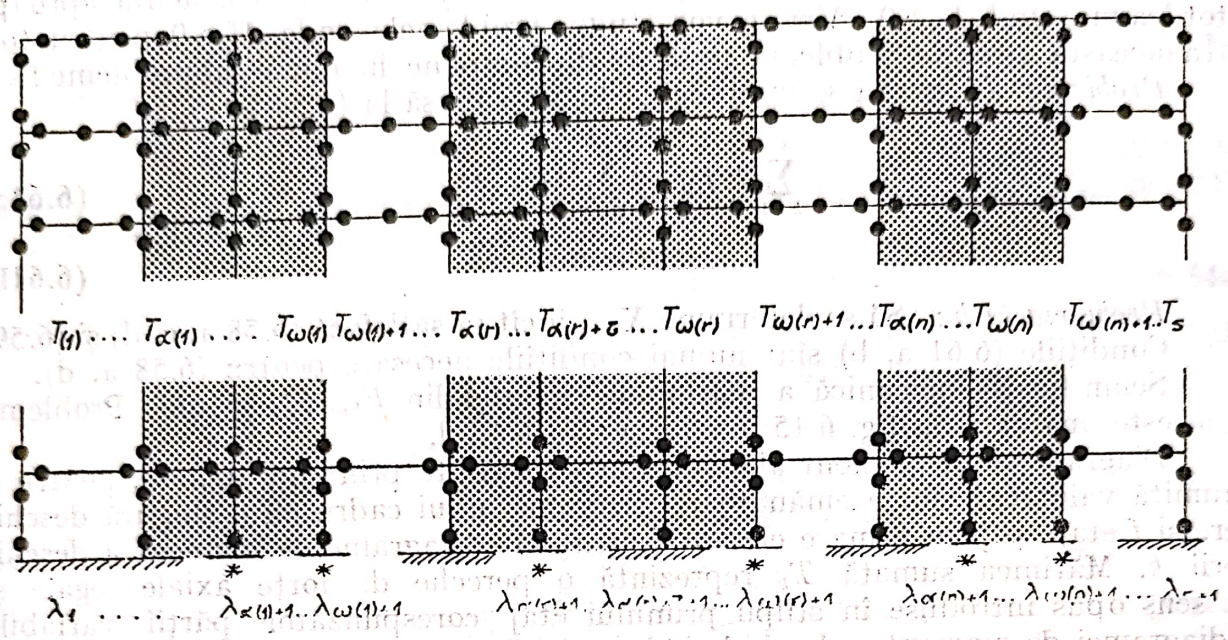


Fig. 6.16

Cel mai bine se aleg $T_k\,(k\notin N)$, λ_1 și $\lambda_{k+1}\,(k\notin N)$ drept cele $(s+2)$ variabile bază iar $T_k\,(k\notin N)$ și $\lambda_{k+1}\,(k\in N^-)$ cele $(s-1)$ variabile din afara bazei.

Variabilele bază alese mai sus și funcția de greutate (6.57) se pot acum exprima în funcție de variabilele din afara bazei astfel:

$$T_{\alpha(i)+k}=\sum_{k=\alpha(i)+k}^{\omega(i)} W_{k+1}+(\text{termeni ai variabilelor din afara bazei}) \tag{6.63a}$$

$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ \omega(i)-\alpha(i)$ pentru $i\neq r$ și $k=\tau+1,\ \tau+2,\ \ldots,\ \omega(r)-\alpha(r)$ pentru $i=r)$

$$T_{\alpha(r)+k}=\sum_{k=\alpha(r)+k}^{\omega(r)} W_{k+1}+\left\{M-\sum_{k\in N} L(N;\,k)\,W_{k+1}\right\}\Big/\,L(N^-;\,\alpha(r)+\tau)+$$

$$+(\text{termeni ai variabilelor din afara bazei}) \tag{6.63b}$$

$$\lambda_1=W_1+T_1 \tag{6.64a}$$

$$\lambda_{k+1}=W_{k+1}+T_{k+1}-T_k\quad(k\notin N) \tag{6.64b}$$

$$\lambda_{\alpha(r)+\tau+1}=\left\{\sum_{k\in N} l(N\,;\,k)W_{k+1}-M+\sum_{k\notin N} L(N;\,k)T_1\right\}\Big/\,L(N^-;\,\alpha(r)+\tau) \tag{6.64c}$$

$$+(\text{termeni ai variabilelor din afara bazei cu coeficienți negativi})$$

$$G=\frac{g}{2}\left[\sum_{j=1}^{f} h_j^2Q_j+\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{s} l_k^2F_k+\tilde{L}(N^-\,;\ \alpha(r)+\tau)M-\sum_{k\in N} L(N\,;\,k)\{\tilde{L}(N^-;\right. \tag{6.65}$$

$$\left.\alpha(r)+\tau)-\tilde{L}(N\,;\ k)\}\,W_{k+1}+\sum_{k\notin N} L(N^-\,;\,k)\{\tilde{L}(N^-\,;\,k)-\right.$$

$$-\tilde{L}(N^-;\alpha(r)+\tau)\}T_k+\sum_{k\in N}\tilde{L}(N^-;\,k)\{\tilde{L}(N^-;\alpha(r)+\tau)-\tilde{L}(N^-;K)\}\lambda_{k+1}\Big]$$

unde T_1 din (6.64 a) și T_{k+1} din (6.64 b) pot fi variabile din afara bazei în cazul cînd indicii 1 și $k+1$ aparțin lui N și pot deveni variabile din bază în celelalte cazuri. Expresiile $L(N;k)$ și $\tilde{L}(N;k)$ sînt definite pentru toți $k\in K$ de

$$L(N;k)=\begin{cases}\sum_{p=i}^{k} l_p & i-1\notin N \quad \text{și} \quad i,\ i+1,\ \ldots,\ k-1\in N\\ l_k & k-1\notin N\end{cases} \tag{6.66a}$$

$$\tilde{L}(N,\ k)=\begin{cases}\sum_{p=i}^{k} l_p^2\Big/\sum_{p=i}^{k} l_p & i-1\notin N \quad \text{și} \quad i,\ i+1,\ \ldots,\ k-1\in N\\ l_k & k-1\notin N\end{cases} \tag{6.66b}$$

În virtutea acestor definiții, $L(N;k)$ și $\tilde{L}(N;k)$ vor fi denumite, respectiv, *deschidere extinsă* și *deschidere redusă*, k, asociate mulțimii N. Ambele noțiuni au un rol important în rezolvarea problemei de greutate minimă.

Soluția de bază ce corespunde la (6.63), (6.64) și (6.65) se poate obține punînd variabilele din afara bazei egale cu zero. Soluția de bază este admisibilă dacă sînt satisfăcute următoarele condiții asupra lui F_k^c:

$$R_k^c\geqslant F_{k-1}+F_k^0 \tag{6.67}$$

$$\sum_{k\in N^-} L(N^-;\,k)R_{k+1}^c\leqslant M+\sum_{k\in N^-}\Sigma\, L(N^-;\,k)(F_k+F_{k+1}^0) \tag{6.68a}$$

$$M+\sum_{k\in N} L(N;\,k)(F_k+F_{k+1}^0)\leqslant\sum_{k\in N} L(N;\,k)R_{k+1}^c \tag{6.68b}$$

Pentru cazul special cînd $R_k^c=R^c$ (constant) pentru toți k, condițiile (6.68) se reduc la

$$\frac{M+\sum_{k\in N} L(N;k)\,(F_k+F_{k+1}^0)}{\sum_{k\in N} L(N;k)}\leqslant R^c\leqslant\frac{M+\sum_{k\in N^-} L(N^-;k)\,(F_k+F_{k+1}^0)}{\sum_{k\in N^-} L(N^-;k)} \tag{6.69}$$

Dacă toți coeficienții variabilelor din afara bazei din (6.65) sînt nenegativi, atunci

$$\max_{k\ni N^-}\{\tilde{L}(N^-;\,k)\}\leqslant\tilde{L}(N^-;\alpha(r)+\tau)\leqslant\min_{k\in N^-}\{\tilde{L}(N^-;k)\} \tag{6.70}$$

iar soluția bază este soluția admisibilă minimă corespunzătoare circumstanțelor din fig. 6.16.

Deși condițiile (6.67), (6.68 a, b) și (6.70) constituie un set de criterii pentru soluția admisibilă minimă, ele nu dau o metodă constructivă pentru deducerea acestei soluții. Se consideră, prin urmare, cazul cînd valorile prescrise $\{R_k^c\}$ sînt astfel încît (6.68 b) nu este satisfăcută.

$$\sum_{k\in N} L(N;k)R_{k+1}^c\leqslant M+\sum_{k\in N} L(N;k)(F_k+F_{k+1}^0) \tag{6.71}$$

în timp ce (6.67) și (6.70) sînt satisfăcute. Soluția admisibilă minimă pentru acest caz se poate deduce aplicînd metoda simplex duală a programării liniare

parametrice. În cazul relației (6.71) numai primul termen din (6.64 c) va deveni negativ pentru variabilele nule din afara bazei, deci este necesar să eliminăm $\lambda_{\alpha(r)+\tau+1}$ din setul de variabile de bază. Dintre T_k ($k \notin N$) cu coeficienți pozitivi din (6.64 c), noua variabilă de bază se determină prin considerarea raportului minim al coeficienților lui T_k din (6.65) la coeficientul lui T_k din (6.64 c). Deci $T_{\tilde{m}}$ este astfel încît

$$\tilde{L}(N\,;\,\tilde{m})=\min_{k\notin N}\{L(N\,;\,k)\} \tag{6.72}$$

și se alege ca nouă variabilă de bază în loc de $\lambda_{\alpha(r)+\tau+1}$. Dacă din raportul minim rezultă mai mult decît un indice, se alege unul dintre ei, și procedeul se repetă, eliminînd toți indicii ce corespund raportului minim, păstrînd numai indicele corespunzător celei mai mari deschideri reduse.

Setul de indici ce constă din N și $\tilde{m}$ este notat cu N^+ și poate fi scris în forma :

$$N^+=\{\bar{\alpha}(1),\ \bar{\alpha}(1)+1,\ \ldots,\ \bar{\omega}(1)\ ;\ \ldots\ ;\ \bar{\alpha}(q),\ \bar{\alpha}(q)+1,\ \ldots\ ;\ \bar{\alpha}(t),\ \ \bar{\alpha}(t)+1\ldots\} \tag{6.73}$$

Se notează că toate cazurile posibile ale grupului de care aparține $\tilde{m}$ se pot exprima sub această formă. De exemplu, numai $\tilde{m}$ poate forma un nou grup cuprins între grupurile de indici i și $(i+1)$ din N, sau $\tilde{m}$ poate conecta la întîmplare o pereche consecutivă de grupuri de indici din N pentru a forma un grup mai mare. Dacă $\tilde{m}$ este identificat cu $\bar{\alpha}(u)+\bar{\tau}$ după renumerotare, noua soluție de bază și condițiile de admisibilitate se pot determina înlocuind N^-, N ; $\alpha(i)$, $\omega(i)$; r, τ, și n prin N, N^+ ; $\bar{\alpha}(q)$; $\bar{\omega}(q)$; u, τ, și t, respectiv, în (6.63), (6.64), (6.65) și (6.68). Din (6.70) și (6.72) urmează că

$$\max_{k\in N}\{\tilde{L}(N\,;\ k)\}\leqslant\tilde{L}(N\,;\,\bar{\alpha}(u)+\bar{\tau})\leqslant\min_{k\in N}\{\tilde{L}(N\,;\ k)\} \tag{6.74}$$

se conservă și că noua soluție de bază este soluția de greutate minimă.

Se trage concluzia că pînă aici N a fost construit prin aplicarea succesivă a relației (6.72) pentru mulțimea golurilor, condiția de optimalitate la fiecare stadiu se păstrează și în consecință (6.70) este satisfăcută. Soluția inițială dedusă din mulțimea golurilor este dată de

$$N=\{m\} \tag{6.75}$$

$$l_m=\min\{l_k\} \tag{6.76}$$

$$T_m=M/l_m,\ \ T_k=0\ \ (k\neq m) \tag{6.77}$$

pentru reacțiunea care satisface relația (6.67) și

$$R^c_{m+1}\geqslant M/l_m+F_m+F^0_{m+1} \tag{6.78}$$

Cu aceasta se regăsește soluția R. Tanabashi, T. Nakamura.

Procedeul descris mai sus prezintă o metodă de construcție a soluției de greutate minimă pentru restricții de reacțiuni prescrise. Procedeul de construcție este în esență o metodă de distribuție a forțelor tăietoare pe deschideri, acestea fiind concentrate în deschiderile unde restricțiile asupra reacțiunilor nu sînt severe. Ordinea de distribuție a forțelor tăietoare ale deschiderilor pentru fiecare nivel al restricțiilor de reacțiuni este dată de (6.72), în concordanță cu deschiderea redusă minimă asociată cu N.

Scanned with OKEN Scanner

Procedeul distribuției forței tăietoare reprezentat de relațiile (6.62) la (6.74) este general pentru cadrele cu mai multe etaje și mai multe deschideri și deci pare mai potrivită denumirea lui de *legea de distribuție a forței tăietoare a deschiderilor*. Forța tăietoare determinată de această lege va fi denumită *forța tăietoare de proiectare a deschiderii*.

Determinarea lui $X_{j,k}$

Dacă $k \notin N$, atunci $X_{j,k}=0$. Pentru $k \in N$, $X_{j,k}$ nu poate fi unic determinat cu excepția cazului cînd N constă dintr-un singur element m. Prin urmare, trebuie introduse anumite condiții adiționale pentru determinarea lui X.

Următorul procedeu este un exemplu de aplicare a metodei de determinare a lui $X_{j,k}$ din T_k, în care distribuția momentelor plastice ale riglelor și stîlpilor se efectuează într-o manieră continuă și regulată.

Fie

$$X_{j,k}=l_k T_k M_j/M \tag{6.79}$$

pentru care condițiile (6.59 c, d) sînt satisfăcute, și atunci

$$h_j Q_j(l_{k-1}T_{k-1}+l_k T_k)+(M-l_{k-1}T_{k-1})l_{k-1}F'_{j,k-1}+(M-l_k T_k)l_k F'_{j,k} \geq 0 \tag{6.80a}$$

$$M_j \geq 0 \tag{6.80b}$$

$B_{j,k}$ și $C_{j,k}$ pot fi determinate din

$$B_{j,k}=\frac{1}{4}l_k(F_{j,k}+4T_k M_j/M) \tag{6.81a}$$

$$C_{j,k}=\frac{1}{4}h_j Q_j(l_{k-1}T_{k-1}+l_k T_k)M+\frac{1}{4}\{(M-l_{k-1}T_{k-1})l_{k-1}F'_{j,k-1}+(M-l_k T_k)l_k F'_{j,k}\}/M \tag{6.81b}$$

unde T_k ($k \in N$) este obținut prin egalarea variabilelor din afara bazei din (6.63 a, b) cu zero și $T_k=0$ ($k \notin N$).

e) **Mecanismul Foulkes extins**

Condițiile ca rotirile articulațiilor plastice ale elementelor și tasările fundațiilor să fie compatibile cu proiectarea, se pot scrie în funcție de variabilele cinematice definite în fig. 6.14, astfel :

$$-\Psi_{j,k+1}-(\nu_k-\nu_{k+1})/l_k \leq \Phi^M_{j,k} \leq \Psi_{j,k}+(\nu_k-\nu_{k+1})/l_k \tag{6.82}$$

$$\gamma_j \geq \Psi_{j-1,k}, \quad \gamma_j \geq \Psi_{j,k} \tag{6.83a, b}$$

$$\Phi^M_{j,k} \geq 0. \ (k \notin N) \ ; \ \Phi^M_{j,k}=0 \ (k \in N) \tag{6.84a, b}$$

$$\nu_{k+1} \geq 0 \ (k \in N^-) \ ; \ \nu_1=\nu_{k+1}=0 \ (k \notin N^-) \tag{6.85a, b}$$

Condițiile de mecanism Foulkes extins devin :

$$\Psi_{j,k}+\Psi_{j,k+1}+2\Phi^M_{j,k}+2(\nu_k-\nu_{k+1})/l_k=\Theta l_k \tag{6.86}$$

$$2\gamma_j-(\Psi_{j-1,k}+\Psi_{j,k})=\Theta h_j \tag{6.87}$$

unde $j=1, \ldots, f$. Din (6.84 b), (6.85 b), (6.86) și (6.87), γ_j, $\psi_{j,k}$, ν_{k+1} ($k \in N^-$) și $\Phi^M_{j,k}$ $k \notin N$) se pot determina în mod unic, cu excepția constantei nedefinite

Θ, cum urmează:

$$\Psi_{j,k}=\frac{1}{2}\Theta\tilde{L}(N^-;\alpha(r)+\tau),\qquad \gamma_1=\frac{1}{2}\Theta\left\{h_1+\frac{1}{2}\tilde{L}(N^-;\alpha(r)+\tau)\right\}$$

$$\gamma_j=\frac{1}{2}\Theta\{h_j+L\,N^-;\alpha(r)+\tau)\}\qquad (j=1,2,\ldots,f)$$

$$\gamma_{k+1}=\frac{1}{2}\Theta L(N^-;\,k)\{\tilde{L}(N^-;\alpha(r)+\tau)-\tilde{L}(N^-;\,k)\}\qquad (k\in N^-)$$

$$\Phi^M_{j,k}=\frac{1}{2}\Theta\{L(N^-;\,k)/l_k\}\{\tilde{L}(N^-;\,k)-\tilde{L}(N^-;\alpha(r)+\tau)\}\qquad (k\notin N)\qquad (6.88)$$

Deoarece (6.70) este satisfăcută, condițiile (6.84 a) și (6.85 a) se păstrează. Condițiile (6.82) și (6.83) se pot scrie sub următoarea formă dacă se substituie (6.88) în (6.82) și (6.83):

$$\max_{k\notin N}\{2\tilde{L}(N^-;\,k)-l_k^2/l(N^-;\,k)\}\leqslant 2\tilde{\tau}(N^-;\alpha(r)+\tau)\leqslant 4h_1\qquad (6.89)$$

Pentru $N=\{m\}$, deci cînd $\alpha(r)+\tau=m$, condiția (6.89) se reduce la

$$\max_{k\neq m}\{l_k\}\leqslant 2l_m\leqslant 4h_1\qquad (6.90)$$

În concluzie (6.81) sînt soluțiile pentru proiectarea la greutatea minimă ale unei clase de cadre ce satisfac condițiile geometrice (6.90) și sînt supuse la încărcările de proiectare ce satisfac condițiile (6.67), (6.68 a, b) și (6.80 a, b).

f) **Procedeul de calcul și exemple**

Principalii pași de aplicare a procedeului propus de T. Nakamura, T. Nagase sînt prezentați în schema logică din fig. 6.17.

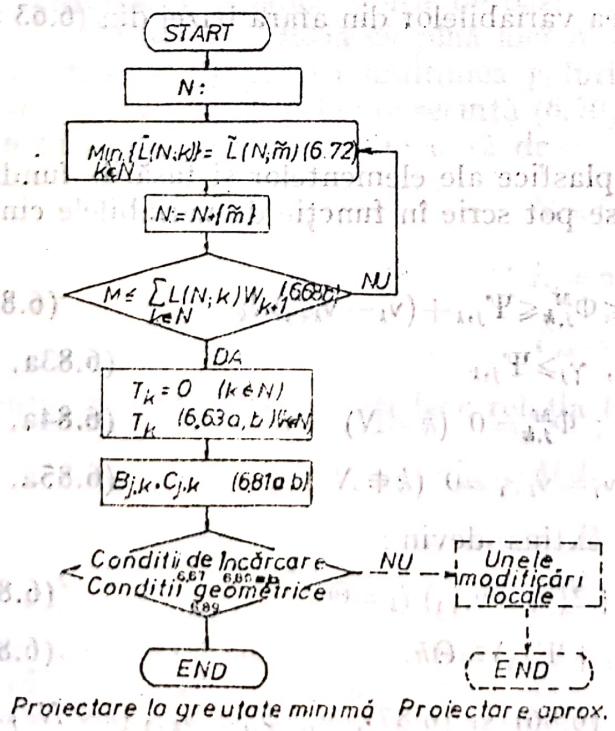


Fig. 6.17

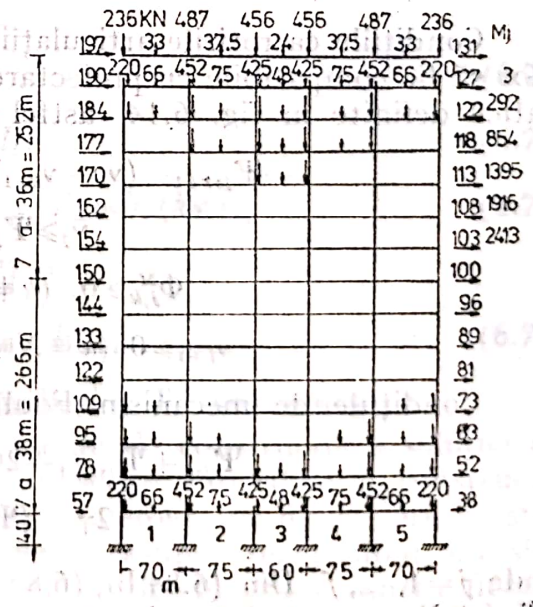


Fig. 6.18

În timp ce toate condițiile de încărcare (6.67) și (6.80 a, b) și condițiile geometrice (6.89) sînt verificate pentru o soluție exactă a greutății minime există multe probleme practice în care unele condiții sînt numai ușor sau local neverificate. Dacă, de exemplu, condițiile $M_j \geq 0$ nu sînt verificate numai în unul sau cîteva din ultimele etaje, se vor efectua unele modificări locale cu ajutorul bine cunoscutei distribuții a momentelor plastice în aceste zone. Din punct de vedere al restricțiilor de reacțiuni aceste modificări conduc la o margine superioară a soluției de greutate minimă.

Drept exemplu se consideră cadrul cu 5 deschideri și 15 etaje din fig. 61.8 proiectat pentru diferite valori ale restricției de reacțiune uniformă R^c.

Pentru ilustrarea soluției exacte, încărcările verticale concentrate din grinzile ultimului etaj au fost reduse pentru ca inegalitatea $M_{15} \geq 0$ să fie satisfăcută, iar încărcările din stîlpii ultimului etaj au crescut corespunzător încît încărcarea totală a ultimului etaj să fie aceiași ca cea a celorlalte etaje. O margine superioară a soluției problemei în care încărcările verticale din riglele ultimului etaj sînt aceleași ca cele ale riglelor celorlalte etaje se obține prin aplicarea metodei distribuției momentelor plastice numai la riglele și stîlpii ultimului etaj.

Tabelul 6.2 ilustrează procesul de generare a mulțimii N ce reprezintă ordinea de distribuție a forței tăietoare a deschiderii, și marginile superioară și inferioară ale lui R^c corespunzătoare lui N. Dacă $R^c \geq 23\,582$ KN, atunci $N=\{3\}$, iar soluția de greutate minimă este dată de T. Tanabashi—T. Nakamura. Dacă valoarea prescrisă a lui R^c este mai mică decît această valoare. atunci forța tăietoare care a fost concentrată în deschiderea treia trebuie distribuită la alte deschideri.

Tabelul 6.2

Succesiunea repartiției forței tăietoare a deschiderii

N \ k	Lungimea redusă a deschiderii, $L(N;k)$ (m) 1	2	3	4	5	R_c (KN)	Soluția
Celule	7,00	7,50	6,00	7,50	7,00		
{3}	7,00	7,50	6,00	6,83	7,00	23 582	I
{3, 4}	7,00	7,50	6,00	6,83	6,89	12 727	II
{3, 4, 5}	7,00	7,50	6,00	6,83	6,89	8 394	III
{1, 3, 4, 5}	7,00	7,26	6,00	6,83	6,89	8 203	IV
{1, 2, 3, 4, 5}	7,00	7,26	6,89	7,05	7,04	7 903	V

Ordinea de repartiție ascultă de legea de distribuție a forței tăietoare și nu este necesară ordonarea deschiderilor reale.

Scanned with OKEN Scanner

Pot fi construite cinci clase de soluții în concordanță cu valoarea $R \geqslant 7\,903$ KN prin aplicarea procedeului propus. Fig. 6.19 arată variația forței tăietoare T_k ($k=1, 2, ..., 5$) în cele cinci clase de soluții în funcție de R^c. Geometria cadrului a fost

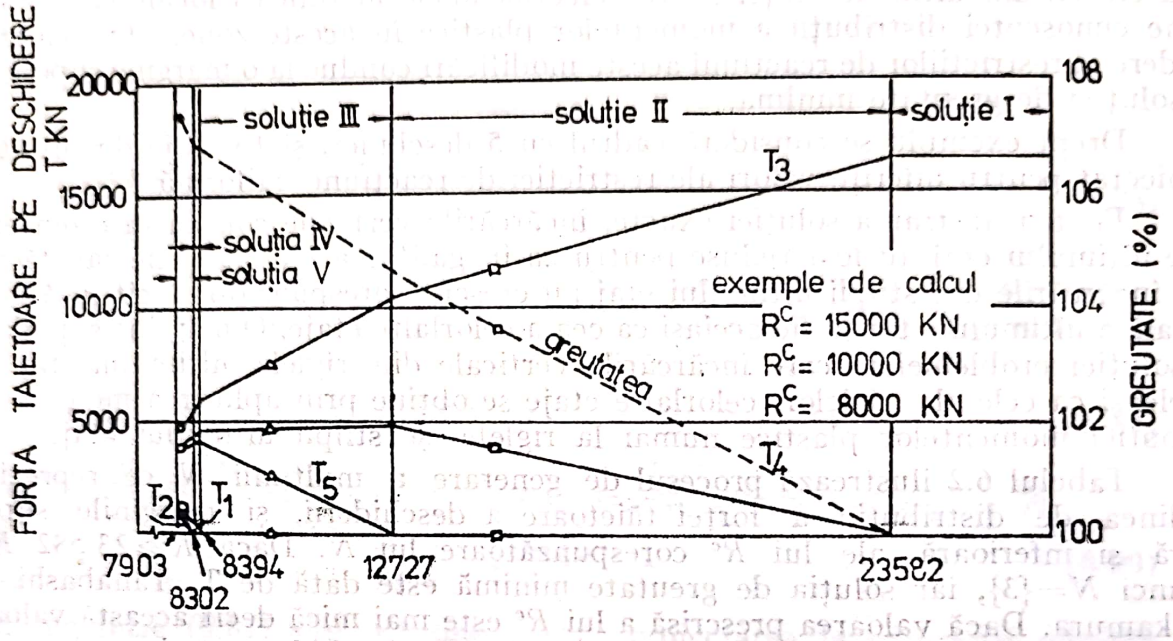


Fig. 6.19

Fig. 6.20 ilustrează mecanismul Foulkes extins pentru soluția III.

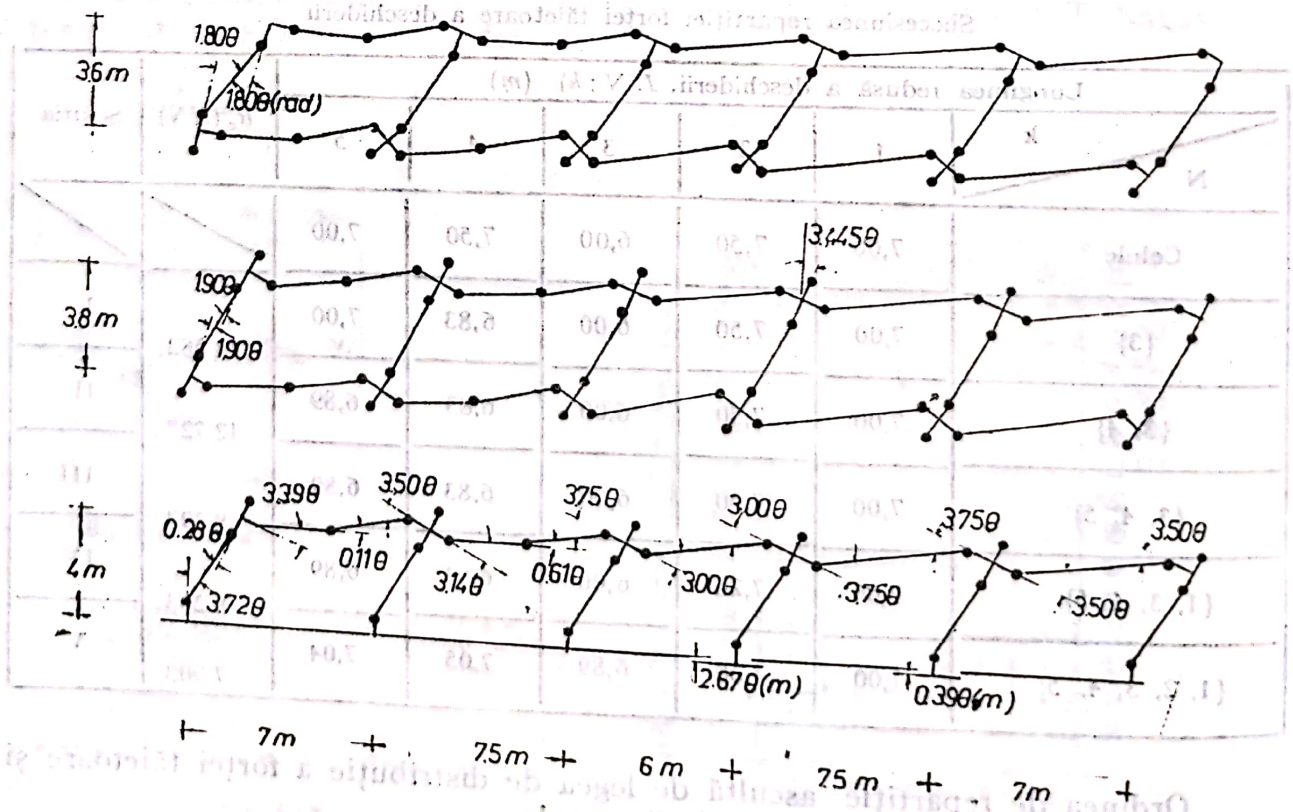


Fig. 6.20

aleasă încît să satisfacă relaţia geometrică (6.90) şi aceasta garantează că mecanismul Foulkes extins poate fi construit.

Momentele plastice şi valorile reacţiunilor pentru cazurile $R^c = 15\,000$, 10 000 şi 8 000 kN exemplificate de soluţiile II, III şi V sînt arătate în fig. 6.21, 6.22 şi 6.23. Numerele scrise cursiv reprezintă momentele de cadru.

Din aceste exemple, rezultă că, în timp ce valoarea reacţiunii de tracţiune este de 8 986 KN în soluţia I fără restricţii de reacţiuni, aceasta descreşte rapid cînd forţa tăietoare a deschiderii este distribuită conform legii propuse. Variaţia greutăţii dată de (6.57) în funcţie de R^c este arătată în fig. 6.19. Creşterea în greutate pentru o creştere mare a restricţiilor de este de aproximativ 8% în soluţia I. Aceasta este datorită în mare măsură geometriei cadrului, unei mici diferenţe între deschiderile maximă şi minimă, ca şi condiţiei simple de cedare exprimată numai în funcţie de momentul încovoietor.

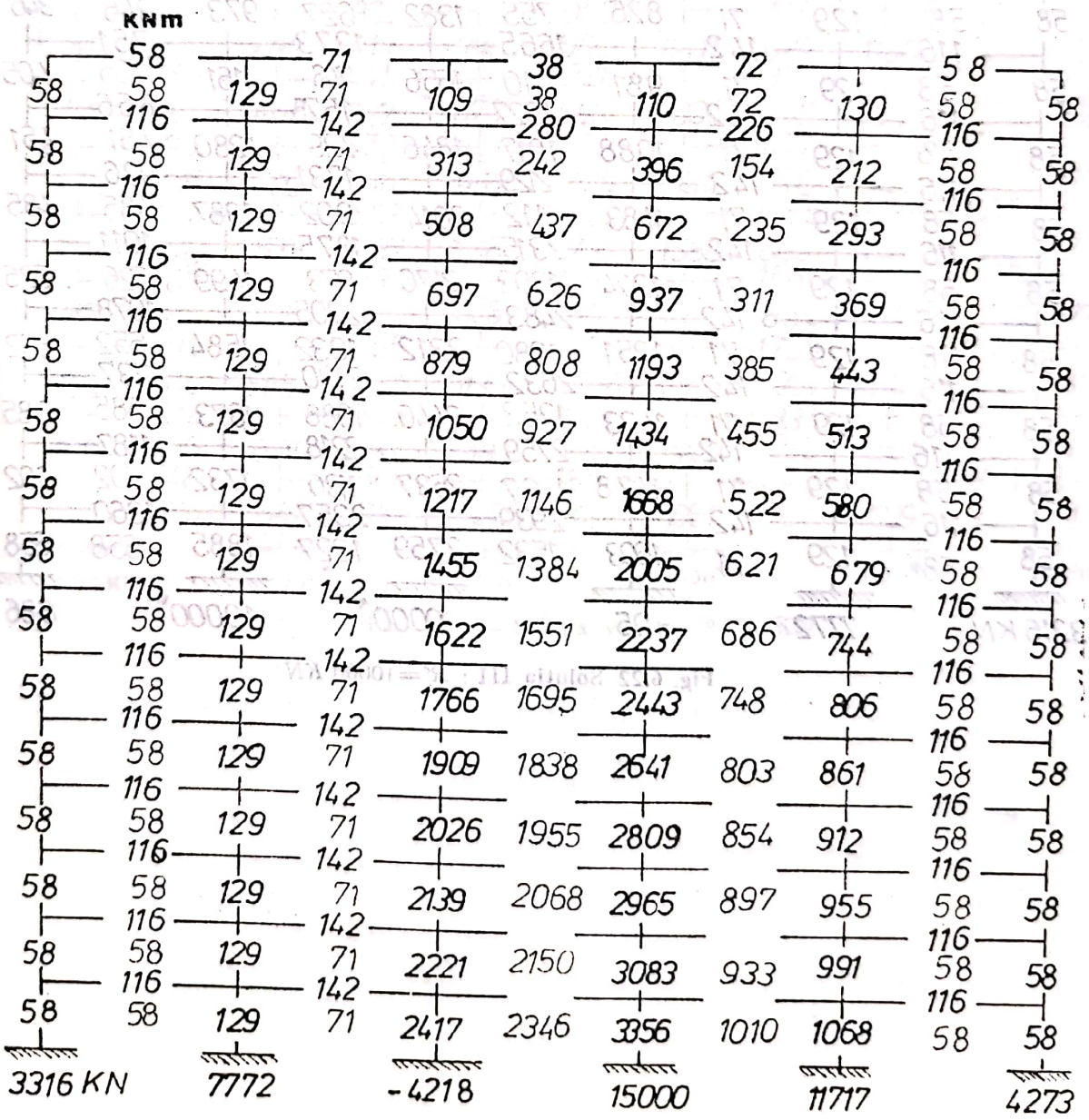


Fig. 6.21 Soluţia II : $R^c = 1500\,KN$

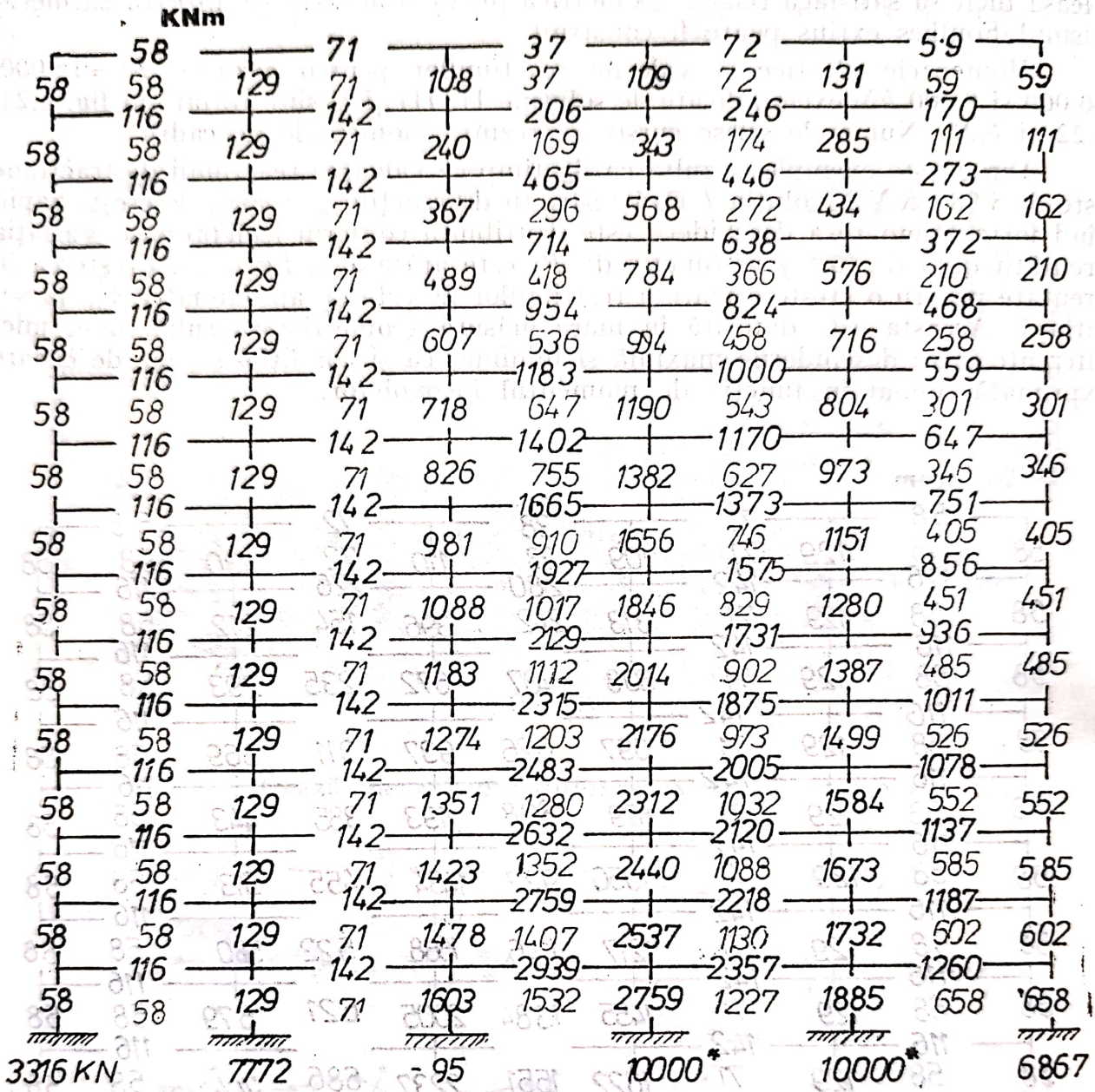


Fig. 6.22 Soluţia III : $R^c = 10000\ KN$

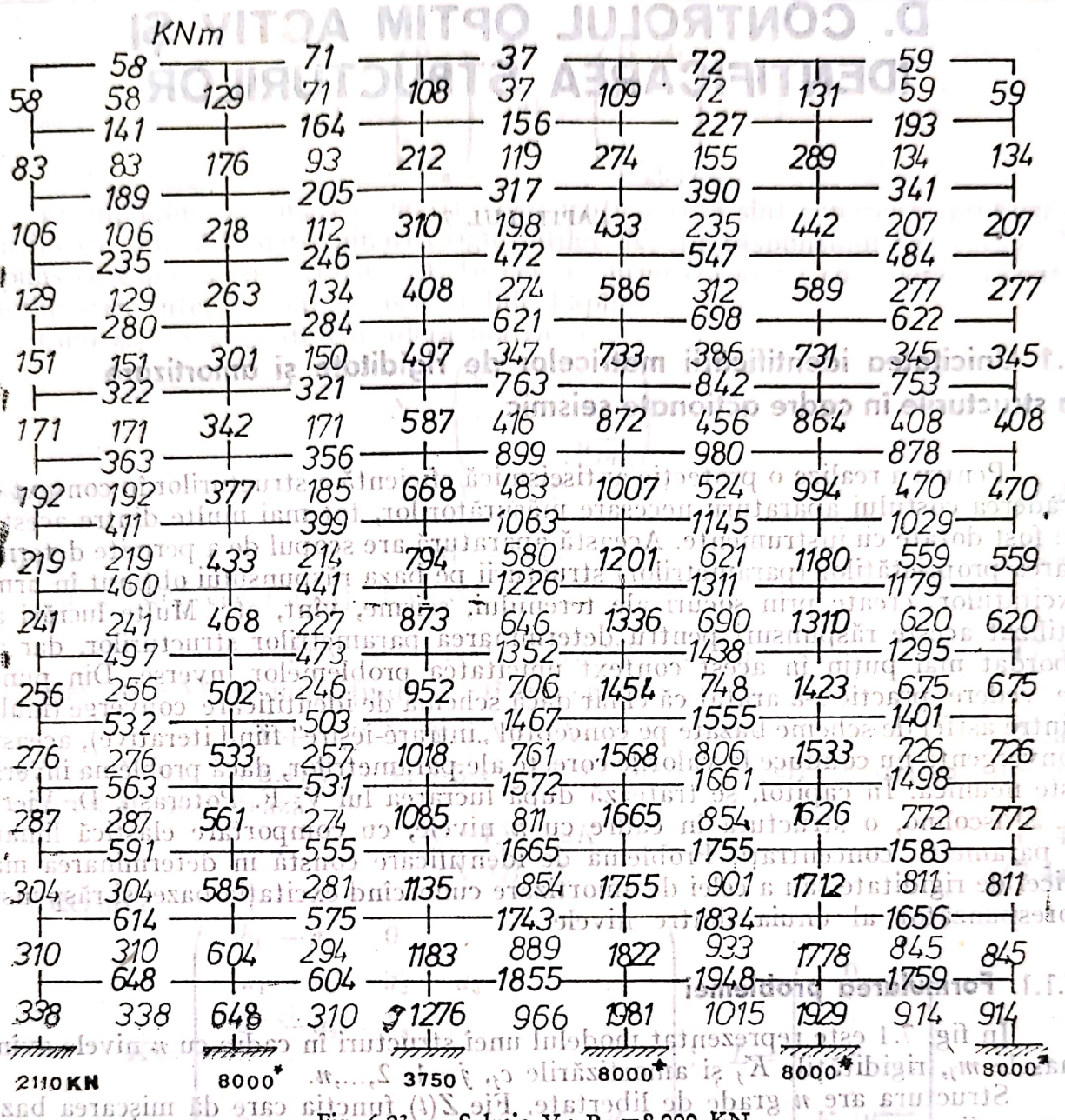


Fig. 6.23 — Soluţia V : $R_c = 8\,000$ KN

D. CONTROLUL OPTIM ACTIV ȘI IDENTIFICAREA STRUCTURILOR

CAPITOLUL 7

7.1 Unicitatea identificării matricelor de rigiditate și amortizare la structurile în cadre acționate seismic

Pentru a realiza o protecție antiseismică eficientă a structurilor în context cu scăderea costului aparaturii necesare măsurătorilor, tot mai multe dintre acestea au fost dotate cu instrumente. Această aparatură are scopul de a permite determinarea proprietăților (parametrilor) structurii pe baza răspunsului obținut în urma excitațiilor create prin șocuri ale terenului, seisme, vînt, etc. Multe lucrări au utilizat aceste răspunsuri pentru determinarea parametrilor structurilor, dar au abordat mai puțin în acest context unicitatea problemelor inverse. Din punct de vedere practic s-a arătat că chiar dacă schema de identificare converge (multe dintre astfel de scheme bazate pe conceptul „intrare-ieșire" fiind iterative), această convergență nu conduce la valorile corecte ale parametrilor, dacă problema inversă este neunică. În capitol, se tratează după lucrarea lui V. F. Poterașu, D. Vieru, G. Muscolino, o structură în cadre cu n nivele, cu comportare elastică liniară și parametri concentrați. Problema de identificare constă în determinarea matricei de rigiditate sau a celei de amortizare cunoscînd excitația bazei și răspunsul corespunzător al unuia dintre nivele.

7.1.1. Formularea problemei

În fig. 7.1 este reprezentat modelul unei structuri în cadre cu n nivele avînd masele m_j, rigiditățile K_j și amortizările c_j, $j=1, 2,...,n$.

Structura are n grade de libertate. Fie $Z(t)$ funcția care dă mișcarea bazei structurii.

Se va nota prin $W_j(t)$, $j=1, 2,...,n$, mișcarea absolută a nivelului j corespunzătoare intrării $Z(t)$. Mișcarea structurii este modelată prin următorul sistem de ecuații diferențiale:

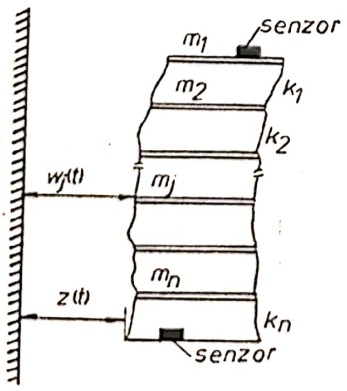


Fig. 7.1

$$M\ddot{W}+C\dot{W}+AW=BZ(t) \tag{7.1}$$

unde $C=\alpha M+\beta A$ (amortizare proporțională)

$$M=\begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & m_n \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -K_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -K_{n-1} & K_{n-1}+K_n \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ K_n\end{pmatrix};\quad W=\begin{pmatrix}W_1(t)\\ \vdots\\ W_n(t)\end{pmatrix}$$

Presupunînd că masele m_j și coeficienții α și β sînt cunoscuți, problema identificării constă în determinarea rigidităților K_j și a răspunsului fiecărui nivel, răspuns corespunzător intrării $Z(t)$. În cele ce urmează se va considera că toate funcțiile care intervin sînt transformabile Laplace.

Cum $m_j>0$ se poate considera matricea

$$N=\begin{pmatrix}\sqrt{m_1} & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \sqrt{m_n}\end{pmatrix}$$

și nota

$$Y=NW \tag{7.2}$$

de unde

$$W=N^{-1}Y \tag{7.2a}$$

Cu aceste relații (7.1) devine:

$$MN^{-1}\ddot{Y}+CN^{-1}\dot{Y}+AN^{-1}Y=BZ(t) \tag{7.3}$$

Dar $M=N^2$ și înmulțind la stînga cu N^{-1} se obține:

$$\ddot{Y}+N^{-1}CN^{-1}\dot{Y}+N^{-1}AN^{-1}=N^{-1}BZ(t) \tag{7.3a}$$

$N^{-1}CN^{-1}=N^{-1}(\alpha N^2+\beta A)N^{-1}=\alpha I+\beta N^{-1}AN^{-1}$; unde I este matricea unitate de ordinul n. Se notează

$$N^{-1}AN^{-1}=K \tag{7.4}$$

$$N^{-1}B=L \tag{7.4a}$$

Rezultă

$$K=\begin{pmatrix}b_1 & -a_1 & 0 & \cdots & \cdots\\ -a_1 & b_2 & -a_2 & -a_3 & \cdots\\ 0 & -a_2 & b_3 & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & b_n\end{pmatrix};\quad L=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ K_n/\sqrt{m_n}\end{pmatrix}$$

unde

$$Q_j=\frac{K_j}{\sqrt{m_jm_{j+1}}};\quad j=1,\ldots,n-1 \tag{7.5}$$

$$b_j=\frac{K_{j-1}+K_j}{m_j},\quad K_0=0,\ j=1,\ldots,n \tag{7.5a}$$

Sistemul (7.3a) devine

$$\ddot{Y}+(\alpha I+\beta K)\dot{Y}+KY=LZ(t) \tag{7.6}$$

Se presupune că $Y(0)=\dot{Y}(0)=0$ și aplicînd in (7.6) transformata Laplace, rezultă

$$p^2Y(p)+(\alpha I+\beta K)pY(p)+KY(p)=LZ(t) \tag{7.7}$$

unde $p\in C$, $Y(p)=\int_0^\infty e^{-pt}Y(t)dt$; $Z(p)=\int_0^\infty e^{-pt}Z(t)dt$

Luînd $p=ix$, $x\in R$ şi efectuînd calculele în (7.7), se obţine

$$\left(K-\frac{x^2-\alpha xi}{1+\beta xi}I\right)Y(p)=\frac{L}{1+\beta xi}Z(p) \tag{7.7a}$$

Se notează

$$\frac{x^2-\alpha xi}{1+\beta xi}=\lambda,\quad \frac{1}{1+\beta xi}\cdot L=\frac{1}{q}L_1,\quad q=1+\beta xi$$

După efectuarea înlocuirilor în (7.7a) rezultă

$$(K-\lambda I)Y(\lambda)=L_1Z(\lambda) \tag{7.8}$$

Rezolvînd sistemul (7.8), obţinem

$$Y_j(\lambda)=\frac{\Delta_j}{\Delta}Z(\lambda).$$

Dacă se notează cu $P_j(\lambda)$ minorii principali ai matricei $(K-\lambda I)$, $j=1, 2,...,n$ şi $P_0(\lambda)=1$, se ajunge la

$$Y_j(\lambda)=\frac{K_n}{q\sqrt{m_n}}a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_j\frac{P_{j-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)}Z(\lambda)$$

Deoarece

$$W_j(\lambda)=\frac{\lambda}{\sqrt{m_j}}Y_j(\lambda)$$

avem

$$W_j(\lambda)=\frac{1}{q}\frac{1}{\sqrt{m_j}}\frac{K_n}{\sqrt{m_n}}a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_j\frac{P_{j-1}(\lambda)}{P_j}\cdot Z(\lambda),\quad j=1,\ldots,n \tag{7.9}$$

Se cunosc următoarele proprietăţi ale minorilor $P_j(\lambda)$:

a) $P_j(\lambda)$ este polinom de gradul j şi are termenul de grad j egal cu $(-1)^j\lambda^j$

b) $P_j(\lambda)$ satisface următoarea relaţie de recurenţă

$$\begin{gathered}P_j(\lambda)=(b_j-\lambda)P_{j-1}(\lambda)-a_{j-1}^2P_{j-2}(\lambda)\ ;\ j=1,\ldots,n\\ P_0(\lambda)=1,\quad P_1(\lambda)=b_1-\lambda\end{gathered} \tag{7.10}$$

Înlocuind în $P_j(\lambda)$ pe $\lambda=\frac{x^2-\alpha xi}{1+\beta xi}$ şi efectuînd calculele, se obţine o fracţie raţională cu numitorul $(1+\beta xi)^j$ şi numărătorul, un polinom de gradul $2j$ în necunoscuta x cu termenul de grad $2j$ egal cu $(-1)^j x^{2j}$,. Se notează numărătorul acestei fracţii cu $Q_j(x)$. Q_j sînt polinoame cu coeficienţi complecşi şi $\lim\frac{Q_j(x)}{x^{2j}}=(-1)^j$. Folosind relaţiia de recurenţă (7.10) se obţine următoarea relaţie de recurenţă pentru polinoamele $Q_j(x)$:

$$\begin{gathered}Q_j(x)=R_j(x)Q_{j-1}(x)-a_{j-1}^2(1+\beta xi)^2Q_{j-2}(x)\ ;\ j=2,\ldots,n\\ Q_0(x)=1\ ;\ Q_1(x)=R_1(x)=-x^2+i(\alpha+\beta b_1)x+b_1\\ R_j(x)=-x^2+i(\alpha+\beta b_j)x+b_j\ ;\ j=1,\ldots,n\end{gathered} \tag{7.11}$$

Din (7.9) acum rezultă

$$W_j(x)=\frac{1}{\sqrt{m_j}}\frac{K_n}{\sqrt{m_n}}a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_j\frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)}(1+\beta xi)^{n-j}Z(x) \tag{7.12}$$

Fie

$$Q_j(x)=\varphi_j(x)+i\psi_j(x) \quad j=1,\ldots,n$$

Înlocuind în (7.11) și efectuînd calculele se obține

$$\begin{aligned}\varphi_j(x)&=(b_j-x^2)\varphi_{j-1}(x)-x(\alpha+\beta b_j)\psi_{j-1}(x)-a_{j-1}^2(1-\beta^2x^2)\varphi_{j-2}(x)+2\beta a_{j-1}^2x\psi_{j-2}(x)\\ \psi_j(x)&=(b_j-x^2)\psi_{j-1}(x)+x(\alpha+\beta b_j)\varphi_{j-1}(x)-a_{j-1}^2(1-\\ &\quad-\beta^2x^2)\psi_{j-2}(x)-2\beta a_{j-1}^2x\varphi_{j-2}(x)\end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\varphi_0(x)=1,\ \psi_0(x)=0,\ \varphi_1(x)=b_1-x^2,\ \psi_1(x)=(\alpha+b_1\beta)x$$

Se vor justifica în cele ce urmează unele proprietăți ale polinoamelor φ_j și ψ_j:

1) grad $\varphi_j(x)=2j$; grad $\psi_j(x)=2j-1$

Acest lucru rezultă imediat din (7.13) utilizînd inducția matematică.

2) $\psi_j(x)\approx x\psi_j(x)$; $j=1,\ldots,n$.

Demonstrație. Se presupune adevărată relația pentru $j-1$, și din (7.13) rezultă adevărată pentru j, deci (2) este adevărată.

Relațiile (7.13) devin acum :

$$\begin{aligned}\varphi_j(x)&=(b_j-x^2)\varphi_{j-1}(x)-(\alpha+b_j\beta)x^2\tilde{\psi}_{j-1}(x)-a_{j-1}^2(1-\beta^2x^2)\varphi_{j-2}(x)+2\beta a_{j-1}^2x^2\tilde{\psi}_{j-2}(x)\\ \tilde{\psi}_j(x)&=(b_j-x^2)\tilde{\psi}_{j-1}(x)+(\alpha+\beta b_j)\varphi_{j-1}(x)-a_{j-1}^2(1-\beta^2x^2)\tilde{\psi}_{j-2}(x)-\\ &\quad-2\beta a_{j-1}^2\varphi_{j-2}(x)\end{aligned} \tag{7.13a}$$

$$\varphi_0(x)=1,\ \tilde{\psi}_0(x)=0,\ \varphi_1(x)=b_1-x^2,\ \tilde{\psi}_1(x)=\alpha+\beta b_1$$

3) grad $\varphi_j(x)=2j$; grad $\tilde{\psi}_j(x)=2(j-1)$, $\varphi_j(x)$, $\tilde{\psi}_j(x)$ sînt pare.

Demonstrație. Se presupune adevărată proprietatea pentru $j-1$ și din (7.13a) rezultă imediat că este adevărată pentru j.

Notînd $x^2=\xi$, $\xi\in[0,\infty)$, din (7.13a) se obține

$$\begin{aligned}\varphi_j(\xi)&=(b_j-\xi)\varphi_{j-1}(\xi)-(\alpha+b_j\beta)\xi\tilde{\psi}_{j-1}(\xi)-a_{j-1}^2(1-\beta^2\xi^2)\varphi_{j-2}(\xi)+2\beta a_{j-1}^2\varphi_{j-2}(\xi)\\ \tilde{\psi}_j(\xi)&=(b_j-\xi)\tilde{\psi}_{j-1}(\xi)+(\alpha+b_j\beta)\varphi_{j-1}(\xi)-a_{j-1}^2(1-\beta^2\xi^2)\tilde{\psi}_{j-2}(\xi)-2\beta a_{j-1}^2\varphi_{j-2}(\xi)\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$j=\overline{2,n},\ \varphi_0=1\ ;\ \tilde{\psi}_0=0\ ;\ \varphi_1(\xi)=b_1-\xi,\ \psi_1(\xi)=\alpha+b_1\beta$$

În cele ce urmează se vor demonstra unele proprietăți ale polinoamelor Q_j, necesare pentru rezolvarea problemei de identificare.

Lema 1. Dacă $(\alpha+b_2\beta)(\alpha+b_1\beta)b_1+a^2(1-\beta^2b_1)\neq 0$ atunci polinoamele $Q_j(x)$ și $Q_{j-1}(x)$ nu au rădăcini comune reale, oricare ar fi $j=1,\ldots,n$.

Demonstrație. Dacă $x_0\neq 0$ ar fi rădăcina comună a celor două polinoame atunci $Q_j(x_0)=Q_{j-1}(x_0)=0\rightarrow\varphi_j(x_0)+ix_0\tilde{\psi}_j(x_0)=\varphi_{j-1}(x_0)+ix_0\tilde{\psi}_{j-1}(x_0)=0\rightarrow\varphi_j(x_0)=\varphi_{j-1}(x_0)=0$; $\tilde{\psi}_j(x_0)=\tilde{\psi}_{j-1}(x_0)=0$

Deci pentru a demonstra lema 1, este echivalent cu a demonstra că polinoamele $\varphi_j(x)$ și $\varphi_{j-1}(x)$, respectiv $\tilde{\psi}_j(x)$ și $\tilde{\psi}_{j-1}(x)$, nu au rădăcini comune egale.

Se demonstrează acest lucru prin inducție.

$$\varphi_1(\xi)=b_1-\xi,\quad \varphi_2(\xi)=(b_2-\xi)(b_1-\xi)-(\alpha+b_2\beta)(\alpha+\beta b_1)\xi-a_1^2(1-\beta^2\xi)$$

Rădăcina comună ar putea fi $\xi_0=b_1$

$$\varphi_2(\xi_0)=-[(\alpha+\beta b_2)(\alpha+\beta b_1)b_1+a^2(1-\beta^2b_1)]\neq 0$$

Prin urmare $\varphi_1(\xi)$ și $\varphi_2(\xi)$ nu au au zerouri comune.

$$\tilde{\psi}_1(\xi)=\alpha+b_1\beta,\quad \tilde{\psi}_2(\xi)=(b_2-\xi)(\alpha+\beta b_1)+(b_1-\xi)(\alpha+\beta b_2)-2\beta a_1^2$$

nu au zerouri comune.

Se presupune că $\varphi_j(\xi)$ și $\varphi_{j-1}(\xi)$, respectiv $\tilde{\psi}_j(\xi)$ și $\tilde{\psi}_{j-1}(\xi)$, nu au zerouri comune egale pentru $j=1,\ldots,n$ și fie ξ_0^* astfel încît

$$\varphi_n(\xi_0^*)=\varphi_{n+1}(\xi_0^{n+1})=\tilde{\psi}_{n+1}(\xi_0^*)=\psi_n(\xi_0^*)=0.$$

Folosind (7.14) se obține

$$(S)\begin{cases} a_n^2(1-\beta^2\xi_0^*)\varphi_{n-1}(\xi_0^*)-2\beta a_n^2\xi_0^*\tilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*)=0 \\ a_n^2(1-\beta^2\xi_0^*)\tilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*)+2\beta a_n^2\varphi_{n-1}(\xi_0^*)=0 \end{cases}$$

(S) este un sistem liniar și omogen în $\varphi_{n-1}(\xi_0^*)$ și $\tilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*)$ cu $\det(S)=(1-\beta^2\xi_0^*)^2+4\beta^2\xi_0^*=(1+\beta^2\xi_0^*)^2\neq 0$. Rezultă că (S) admite numai soluția banală, deci $\varphi_{n-1}(\xi_0^*)=\tilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*)=0$.

Se obține deci că φ_n și φ_{n-1}, respectiv $\tilde{\psi}_n$ și $\tilde{\psi}_{n-1}$, admit zeroul comun ξ_0^*. Este prin urmare contradicție și lema 1 este demonstrată. Dacă $x_0=0$ este suficient să demonstrăm că polinoamele φ_j și φ_{j-1} nu admit rădăcina comună $x_0=0$, $j=1,\ldots,n$, dar $\varphi_{n+1}(0)=\varphi_n(0)=0$. Din prima relație (7.14) se obține

$$a_n^2\varphi_{n-1}(0)=0\to\varphi_{n-1}(0)=0$$

contradicție

Lema 2. Fie K_j submatricele principale de ordin j ale matricei K,

$$\det K_j=\prod_{l=1}^{j}\frac{K_1}{m_l}.$$

Demonstrație. Fie A_j submatricea principală de ordin j a matricei A.

$$\det K_j=\det A_j\,\frac{1}{m_j}\cdot\frac{1}{m_{j-1}}\cdots\frac{1}{m_1}=K_1K_2\ldots K_j\,\frac{1}{m_j}\cdots\frac{1}{m_1}=\prod_{l=1}^{j}\frac{K_1}{m_l}$$

Lema 3.

$$\frac{Q_{j-1}(0)}{Q_j(0)}=\frac{m_j}{K_j}\quad j=2,\ldots,n$$

Demonstrație.

$$P_j(\lambda)=P_j\left(\frac{x^2\alpha xi}{1+\beta xi}\right)=\frac{1}{(1+\beta xi)^j}Q_j(x)$$

Pentru $x=0\to\lambda=0$ și deci $P_j(0)=Q(0)$. Dar $P_j(0)=\det K_j$ și prin urmare

$$\frac{Q_{j-1}(0)}{Q_j(0)}=\frac{\det K_{j-1}}{\det K_j}=\frac{m_j}{K_j}.$$

Consecință.

$$\frac{\varphi_{j-1}(0)}{\varphi_j(0)}=\frac{m_j}{K_j}\quad j=2,\ldots,n.$$

Demonstrație.

$$\forall j=\overline{2,n}\quad\frac{m_j}{K_j}=\frac{Q_{j-1}(0)}{Q_j(0)}=\left.\frac{\varphi_{j-1}(x)+ix\tilde{\psi}_{j-1}(x)}{\varphi_j(x)+ix\tilde{\psi}_j(x)}\right|_{x=0}=\frac{\varphi_{j-1}(0)}{\varphi_j(0)}.$$

7.1.2. Identificare unică folosind răspunsul primului nivel

În acest caz se consideră problema de identificare formulată mai sus, cînd: $Z(t)$ — mișcarea terenului, $W_n(t)$ — răspunsul primului nivel, masele m_j și constantele α și β sînt cunoscute.

Teorema. Dacă $Z(t)$, $W_n(t)$, m_j, $j=1,\ldots,n$, α, $\beta\neq 0$ sînt date, atunci rigiditățile K_j; $j=1,\ldots,n$ se pot determina în mod unic.

Demonstrație. Se presupune că există două mulțimi K_j și K_j^* pentru care W_n și W^* sînt aceleași. Înlocuind în (7.12) $a_j=\dfrac{K_j}{\sqrt{m_j m_{j+1}}}$, avem

$$W_j(x)=\frac{1}{\sqrt{m_j}}\cdot\frac{K_n}{\sqrt{m_n}}\cdot\frac{K_{n-1}}{\sqrt{m_{n-1}m_n}}\cdots\frac{K_j}{\sqrt{m_j m_{j+1}}}\cdot\frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)}(1+\beta xi)^{n-j}Z(x)$$

de unde

$$\frac{W_j(x)}{Z(x)}=\frac{K_n}{m_n}\cdot\frac{K_{n-1}}{m_{n-1}}\cdots\frac{K_j}{m_j}\cdot\frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)}(1+\beta xi)^{-j},\quad j=1,\ldots,n. \tag{7.15}$$

Luînd în (7.15) $j=n$

$$\frac{W_n(x)}{Z(x)}=\frac{K_n}{m_n}\cdot\frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}=\frac{K_n^*}{m_n}\cdot\frac{Q_{n-1}^*(x)}{Q^*(x)}. \tag{7.16}$$

Trecînd la limită pentru $x\to\infty$, se obține $K_n=K_n^*$.

Cu această egalitate se obține din (7.16) relația $\dfrac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{Q_{n-1}^*(x)}{Q_n^*(x)}$ în care nu există nedeterminarea zero supra zero conform lemei 1.

Deci $Q_{n-1}(x)=Q_{n-1}^*(x)$ și $Q_n(x)=Q_n^*(x)$. Folosind inducția completă inversă se presupune

$$K_i=K_i^*,\ Q_i(x)=Q_i^*(x),\ Q_{j-1}(x)=Q_{j-1}^*(x)\text{ pentru }h\leqslant i\leqslant n \tag{7.17}$$

Se deduce o relație similară pentru $h-1$. Folosind relația de recurență (7.11), rezultă

$$\begin{aligned}Q_h&=K_hQ_{h-1}-a_{h-1}^2(1+\beta xi)^2Q_{h-2}\\ Q_h^*&=K_h^*Q_h^*-Q_{h-1}^*(1+\beta xi)^2Q_{h-2}^*\end{aligned}$$

Scăzînd ultimele două relații și utilizînd (7.17), se obține

$$0=(K_h-K_h^*)Q_{h-1}-a_{h-1}^2(1+\beta xi)^2Q_{h-2}+a_{h-1}^2(1+\beta xi)^2Q_{h-2}^*$$

Împărțind prin $(1+\beta xi)Q_{h-1}$ și trecînd la limită pentru $x\to\infty$ avem $0=b_h-b_h^*\to K_{h-1}=K_h^*$. Aplicînd (7.17) pentru $j=2$ avem $K_1=K_1^*$ și unicitatea este stabilită.

Mai departe se va prezenta algoritmul de calcul pentru determinarea valorilor K_j, $j=1,\ldots,n$ atunci cînd $Z(x)$, $W_n(x)$, m_j, α, $\beta\neq 0$ sînt cunoscute.

Pasul 1. Se determină K_n.

Folosind relația

$$\frac{W_n(x)}{Z(x)}=\frac{K_n}{m_n}\frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)} \tag{7.18}$$

nmulțind cu x^2 și trecînd la limită pentru $x\to\infty$, se obține

$$K_n=-m_n\lim_{x\to\infty}\frac{x^2W_n(x)}{Z(x)} \tag{7.19}$$

Pasul 2. Se determină K_h, $h=1,\ldots,n-1$.

Din (7.18) rezultă

$$\frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)} = \frac{K_n}{m_n}\frac{Z(x)}{W_n(x)} \tag{7.19a}$$

Folosind (7.11) se obține

$$\frac{Q_{h+1}(x)}{(1+\beta xi)Q_h(x)} = \frac{R_{h+1}(x)}{1+\beta xi} - a_h^2\frac{Q_{h-1}(x)}{Q_h(x)}(1+\beta xi) \tag{7.20}$$

unde $R_{h+1}(x)=-x^2+i(\alpha+\beta b_{h+1})x+b_{h+1}$ și (7.20) devine

$$\frac{Q_{h+1}(x)}{(1+\beta xi)Q_h(x)} + \frac{x^2}{1+\beta xi} = \frac{b_{n+1}+i(\alpha+\beta b_{h+1})x}{1+\beta xi} - a_h^2\frac{Q_{h-1}(x)}{Q_h(x)}(1+\beta xi) \tag{7.20a}$$

Trecînd la limită pentru $x\to\infty$ în (7.20 a), rezultă

$$b_{h+1}=-\frac{\alpha}{\beta}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\beta xi}\left(\frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)}+x^2\right) \tag{7.21}$$

Cum:

$$b_{h+1}=\frac{K_h+K_{h+1}}{m_{h+1}}$$

$$K_h=b_{h+1}m_{h+1}-K_{h+1},\quad h=1,\ldots,n-1 \tag{7.22}$$

În urma acestui proces iterativ se obțin mărimile K_j. $j=1,\ldots,n$.

Observații.

1) În practică se începe pasul 2 cu determinarea raportului $\frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)}$ din relația (7.19 a) și se obțin b_n și K_{n-1} din (7.21) și (7.22).

2) În cadrul acestui proces iterativ se folosește și următoarea relație obținută din (7.20):

$$\frac{Q_h(x)}{(1+\beta xi)Q_{h-1}(x)} = a_h^2(1+\beta xi)\left[R_{h+1}(x)-\frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)}\right]^{-1} \tag{7.23}$$

unde:

$$a_h^2=\frac{K_h^2}{m_h m_{h+1}}$$

3) Pentru $\beta=0$, repetînd raționamentul se găsește o relație asemănătoare cu (7.21) și anume

$$b_{h+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)}+x^2-\alpha xi\right) \tag{7.21a}$$

7.1.3. Determinarea răspunsului unui alt nivel

Se va arăta că dacă se cunoaște răspunsul primului nivel $W_n(t)$ corespunzător intrării $Z(t)$ se poate determina răspunsul oricărui nivel al structurii. Fie deci cunoscute funcțiile $Z(t)$, $W_n(t)$, masele m_j, $j=1,\ldots,n$ și constantele α și β.

Utilizînd algoritmul expus în teorema de mai sus, se determină în mod unic constantele elastice K_j, $j=1,\ldots,n$. Folosim acum relația (7.15). În această

relație singura necunoscută este $W_j(x)$, deoarece polinoamene $Q_j(x)$ se pot calcula cu relațiile (7.11) dacă sînt cunoscute rigiditățile K_j. obține relația

$$W_j(x)=\frac{K_n}{m_n}\ldots\frac{K_jQ_{j-1}(x)}{m_jQ_n(x)}(1+\beta xi)^{n-j}Z(x),\ j=1,\ldots,n-1$$

adică sînt cunoscute transformatele Laplace ale răspunsurilor celorlalte nivele. Aplicînd inversa transformatei Laplace se găsesc funcțiile $W_j(t)$, $\lambda=1,\ldots,n-1$ care reprezintă răspunsurile necunoscute ale nivelelor j ale structurii.

7.1.4. Determinarea constantelor α și β din matricea de amortizare utilizînd răspunsurile primului și ultimului nivel

Se va considera problema cînd $Z(t)$ — mișcarea terenului, $W_n(t)$ — răspunsul primului nivel, $W_1(t)$ — răspunsul ultimului nivel, masele m_j și rigiditățile K_j, $j=1,\ldots,n$ sînt cunoscute și se determină constantele α și β din matricea de amortizare.

Luînd $j=1$ în relația (7.15) se obține:

$$\frac{W_1(x)}{Z(x)}=\frac{K_n}{m_n}\cdot\frac{K_{n-1}}{m_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{K_1}{m_1}\cdot\frac{1}{Q_n(x)}(1+\beta xi)^{n-1}$$

sau

$$\frac{W_1(x)}{Z(x)}=\det(K)\frac{1}{Q_n(x)}(1+\beta xi)^{n-1}=\det(k)\,x^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{x}+\beta i\right)^{n-1}}{Q_n(x)}$$

Înmulțind ultima expresie cu x^{n+1} și trecînd la limită pentru $x\to\infty$ rezultă:

$$\det(k)\,(-1)^n(\beta i)^{n-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}W_1(x)}{Z(x)} \tag{7.24}$$

de unde

$$\beta^{n-1}=\frac{1}{(-1)^n i^{n-1}\det(K)}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}W_1(x)}{Z(x)} \tag{7.25}$$

Pe de altă parte din (7.11) avem

$$\frac{Q_{h+2}(x)}{(1+\beta x_i)\,Q_h(x)}+\frac{x^2}{1+\beta xi}=\frac{b_{h+1}+i(\alpha+\beta b_{h+1})\,x}{1+\beta xi}-a_h^2\frac{(Q_{h-1}(x)}{Q_h(x)}(1+\beta xi) \tag{7.26}$$

Trecînd la limită în (7.25) pentru $x\to\infty$, se obține:

$$b_{h+1}=-\frac{\alpha}{\beta}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\beta xi}\left(\frac{Q_{h+1}(x)}{Q_{h-1}(x)}+x^2\right) \tag{7.27}$$

Făcînd $h=n-1$ în ultima egalitate, rezultă

$$b_n=-\frac{\alpha}{\beta}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\beta xi}\left(\frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)}+x^2\right)$$

Din (7.15) avem

$$\frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)}=\frac{K_n}{m_n}\frac{Z(x)}{W_n(x)}$$

și deci

$$b_n = -\frac{\alpha}{\beta} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\beta x i}\left(\frac{K_n}{m_n}\frac{Z(x)}{W_n(x)} + x^2\right)$$

Cum

$$b_n = \frac{K_{n-1}+K_n}{m_n}$$

se găsește

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\beta x i}\left(\frac{K_n}{m_n}\frac{Z(x)}{W_n(x)} + x^2\right) - \frac{K_{n-1}+K_n}{m_n} \qquad (7.28)$$

Folosind relațiile (7.25) și (7.28) se obține un sistem în necunoscutele α și β. Rezolvarea acestuia nu comportă difiultăți și se obțin în final valorile constantelor α și β matricea de amortizare $C=\alpha M+\beta A$.

7.1.6. Determinarea răspunsului unui alt nivel în situația identificării matricei de amortizare

S-a arătat mai sus că dacă sînt cunoscute masele m_j, rigiditățile K_j, intrarea $Z(t)$ și răspunsurile $W_n(t)$, $W_1(t)$ se poate determina matricea de amortizare. Cunoscînd acum α, β, K_j, m_j se pot calcula cu relația de recurență (7.11) polinoamele $Q_j(x)$, $j=1, \ldots, n$.

În relația (7.15) singura necunoscută este $W_j(x)$. Din ea se obține

$$\frac{W_j(x)}{Z(x)} = \frac{K_n}{m_n}\cdot\frac{K_{n-1}}{m_{n-1}}\cdots\frac{K_j}{m_j}\frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)}\cdot(1+\beta x i)^{n-j},\quad j=1,\ldots,n \qquad (7.28)$$

Înlocuind în (7.20) pe rînd j cu 2, ..., $n-1$ se obțin transformatele răspunsurilor Laplace ale celorlalte nivele. Aplicînd inversa transformatei Laplace se găsesc funcțiile $W_j(t)$, care reprezintă răspunsurile necunoscute ale nivelelor structurii.

Exemplul 7.1. Unicitatea identificării matricei de rigiditate.

Se consideră următoarele valori numerice pentru masele unei structuri în cadre cu trei etaje: $m_1=m_2=1$, $m_3=2$. Coeficienții din matricea de amortizare $\alpha=2$, $\beta=-0{,}2$. Mișcarea terenului sau intrarea sistemului este modelată prin ecuația :

$$z(t)=2\sin t \text{ cu transformata Laplace } Z(x)=\frac{2}{1-x^2}$$

Răspunsul primului nivel este următorul :

$$W_3(t)=\frac{1}{125}(195\sin t+69\sin 2t-111\sin 3t)$$

iar transformata sa Laplace

$$W_3(x)=\frac{55{,}44-18x^2}{(1-x^2)(4-x^2)(9-x^2)}$$

Conform algoritmului de calcul prezentat, rigiditățile se determină astfel

$$K_3=-m_3\lim_{x\to\infty}\frac{x^2W_3(x)}{Z(x)}=-m_3\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(55{,}44-18x^2)}{(1-x^2)(4-x^2)(9-x^2)}\cdot\frac{1-x^2}{2}=9m_3=18$$

$\boxed{h=2}$ $$b_3=-\frac{\alpha}{\beta}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\beta xi}\left(\frac{Q_3(x)}{Q_2(x)}+x^2\right)$$

$$\frac{Q_3}{Q_2}+x^2=\frac{K_3}{m_3}\frac{Z(x)}{W_3(x)}=9\,\frac{2}{1-x^2}\left[\frac{(1-x^2)\,(4-x^2)\,(9-x^2)}{55{,}44-18\,x^2}\right]+X^2=\frac{36-9{,}92\,x^2}{3{,}08-x^2}$$

Se obține $b_3=10\to K_2=m_3b_3-K_3=20-18=2$

$$a_2^2=\frac{K_2^2}{m_2m_3}=2,\quad R_3(x)=-x^2+10$$

$\boxed{h=1}$ $$b_2=-\frac{\alpha}{\beta}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\beta xi}\left(\frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}+x^2\right)=60$$

$$\frac{Q_2}{Q_1}=a_2^2(1+\beta xi)^2\left(R_3-\frac{Q_3}{Q_2}\right)^{-1}=a_2^2(1+\beta xi)^2\left(10-x^2-\frac{36-13x^2+x^4}{3{,}08-x^2}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{(x^2-3{,}08)\,(1-0{,}4\,xi-0{,}04\,x^2)}{2{,}6+0{,}04x^2}:K_1=b_2m_2-K_2=60\cdot1-2=58$$

Exemplul 7.2. Identificarea coeficienților α și β din matricea de amortizare. Se consideră cunoscute următoarele date pentru o structură în cadre cu trei nivele: masele $m_1=1$, $m_2=1$, $m_3=2$; rigiditățile $K_1=58$, $K_2=2$, $K_3=18$; intrarea sau mișcarea terenului $Z(t)=2\sin t$ cu transformata sa Laplace $Z(x)=\frac{2}{1-x^2}$; răspunsul primului nivel $W_3(t)=\frac{1}{125}(195\sin t+69\sin t2t-111\sin 3t)$ cu transformata Laplace $W_3(x)=\frac{55{,}44-18x^2}{(1-x^2)\,(4-x^2)\,(9-x^2)}$ și răspunsul ultimului nivel (transformata La place)

$$W_1(x)=2\,088\,\frac{(1-0{,}2xi)^2}{(1-x^2)(-x^6-19{,}6ix+89{,}36x^4+4{,}832ix^3-896{,}08x^2+1961{,}ix+1044}$$

Aplicînd (7.25), se obține

$$\beta^2=\frac{1}{(-1)^3i^2\dfrac{K_3K_2K_1}{m_3m_2m_1}}\times$$

$$\times\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\,2\,088\,\dfrac{(1-0{,}2xi)^2}{(1-x^2)(-x^6-19{,}6ix^5+89{,}36x^3+4{,}832ix^3-896{,}08^2+1961{,}6ix+1044}}{\dfrac{2}{1-x^2}}=0{,}04$$

Aplicînd (7.28), rezultă

$$\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\beta xi}\left(9\,\frac{2}{1-x^2}\cdot\frac{(1-x^2)\,(4-x^2)\,(9-x^2)}{55{,}44-18\,x^2}+x^2\right)-10=-10$$

deci

$$\alpha=-10\,\beta\qquad\beta^2=0{,}04$$

cu soluțiile $\alpha=-2$, $\beta=0{,}2$ sau $\alpha=2$, $\beta=-0{,}2$.

Scanned with OKEN Scanner

7.2 Identificarea parametrilor structurilor în domeniul frecvenţei

Tehnicile de identificare a parametrilor structurii sînt de două categorii: parametrii sînt determinaţi fie în domeniul temporal, fie în domeniul frecvenţei. În acest subcapitol, preluat din lucrarea autorilor V. F. Poterașu, M. Di Paola, G. Muscolino, parametrii structurii sînt determinaţi în domeniul frecvenţei. Unii parametri sînt determinaţi impunînd ca diferenţa între densitatea spectrală de putere (PSD) calculată şi măsurată să fie minimă iar alţii din condiţia ca energia cuprinsă într-o bandă semnificativă a răspunsului în vecinătatea valorilor de rezonanţă să fie aceiaşi ca şi pentru răspunsul simulat. Răspunsul este obţinut prin metoda transformării Fourier rapide (FFT). Funcţia de intrare este un impuls Dirac.

7.2.1. Modelul fizic şi matematic al structurii

Structura considerată are comportare liniară şi este un sistem invariant în timp cu moduri normale clasice. Structura este plană, iar răspunsul în direcţia dată este cauzat numai de componenta intrării în acea direcţie.

J. L. Beck a arătat că pentru sisteme liniare, invariante în timp, frecvenţele, amortizările şi coeficienţii de participare ale modurilor joase, împreună cu vitezele şi deplasările modale iniţiale sînt parametri mai buni de estimat în cazul răspunsului seismic decît componentele matricelor de rigiditate şi amortizare a căror determinare este prost condiţionată. Spre deosebire de elementele matricelor, parametrii modurilor dominante ale răspunsului pot fi unic determinaţi plecînd de la acceleraţia terenului şi de la răspunsul măsurat în una sau cîteva poziţii din structură. Răspunsul unui sistem liniar, invariant în timp se poate exprima ca sumă a contribuţiilor modale:

$$X_p(t)=\sum_{j=1}^{N_m} X_{pj}(t) \tag{7.29}$$

unde $X_p(t)$ este deplasarea relativă faţă de teren a masei din structură la timpul t, $X_{pj}(t)$ este deplasarea relativă în modul j la p şi timpul t, iar N_m este numărul de moduri ale structurii.

Ecuaţia de mişcare pentru deplasarea structurii în modul j este

$$\ddot{X}_{pj}+a_j\dot{X}_{pj}+b_jX_{pj}=-c_{pj}\ddot{Z}_g \tag{7.30}$$

Parametrii a_j şi b_j pot fi exprimaţi în funcţie de frecvenţa modală şi fracţiunea amortizării critice ξ în timp ce c_{pj} este coeficientul de participare modului j pentru masa p

$$a_j=2\xi\omega_j \tag{7.31}$$

$$b_j=\omega_j^2 \tag{7.32}$$

Coeficientul de participare este independent de normalizarea formelor modale. Pentru un sistem discret cu matricea maselor $[M]$ şi matricea vectorilor formelor modale $[\Phi]=[\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{N_m}]$ unde Φ_j este vectorul formei modale ale cărui componente pentru p este notat Φ_{pj}, coeficientul de participare a modului j pentru p este dat de

$$c_{pj}=\Phi_{pj}\frac{\Phi_j^T[M]\,I}{\Phi_j^T[M]\,\Phi_j} \tag{7.33}$$

Fiecare componentă a vectorului coloana I este unitatea.

Mărimile măsurate în mod obișnuit sînt accelerația terenului $\ddot{Z}(t)$ și accelerația absolută a răspunsului $\ddot{X}_p(t)+\ddot{Z}_g(t)$ în una sau mai multe poziții din structură.

Ecuațiile modale pot fi în trecute domeniul frecvenței cu transformata Fourier. Deși intervalul de integrare este semi-infinit, în practică aceste transformări sînt finite și discrete în scopul folosirii transformării Fourier rapide (FFT). Transformata Fourier finită $F_j(\omega)$ a funcției $f(t)$ pe intervalul de lungime T este definită astfel:

$$F_j(\omega)=\int_0^T f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{7.34}$$

Fie $A_{pT}(\omega)$ transformata Fourier finită a accelerației absolute $\ddot{X}_p(t)+\ddot{Z}_g, Z_T(\omega)$ transformata Fourier finită a accelerației terenului $\ddot{Z}_g(t)$ iar $X^{(j)}_{pT}(\omega)$ transformata Fourier finită a lui $X_{pj}(t)$.

Algoritmul *FFT* definește valorile complexe transformate în N frecvențe eșantionate egal pe intervalul T al măsurării

$$\omega_n=n\Delta\omega=\frac{2\pi n}{T},\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1 \tag{7.35}$$

Transformatele accelerațiilor și vitezelor modale pentru frecvențele măsurate, se pot exprima în funcție de $X^{(j)}_{pT}(\omega)$

$$\int_0^T \dot{X}_{pj}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = X_{pj}(T)\, e^{-i\omega T} - X_{pj}(0) + i\omega X^{(j)}_{pT}(\omega) - X_{pj}(T) - X_{pj}(0) + i\omega X^{(j)}_{pT}(\omega) \tag{7.36}$$

$$\int_0^T \ddot{X}_{pj}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \dot{X}_{pj}(T) - \dot{X}_{pj}(0) + i\omega\,[X_{pj}(T) - X_{pj}(0)] - \omega^2 X^{(j)}_{pT}(\omega) \tag{7.37}$$

Transformînd ecuația modului i (7.30), rezultă, pentru frecvențele măsurate:

$$X^{(j)}_{pT}(\omega)=\frac{-c_{pj}[b_j-\omega^2-i\omega a_j]}{(b_j-\omega^2)^2+\omega^2 a_j^2} Z_T(\omega) - \frac{b_j-\omega^2-i\omega a_j}{(b_j-\omega^2)^2+\omega^2 a_j^2} \cdot [\dot{X}_{pj}(T)-X_{pj}(0)] - \frac{[a_j b_j+i\omega(b_j-\omega^2-a_j^2)]}{(b_j-\omega^2)^2+\omega^2 a_j^2} \cdot [X_{pj}(T)-X_{pj}(0)] \tag{7.38}$$

Combinarea contribuțiilor modale dă

$$A_{pT}(\omega)=\left[1+\sum_{j=1}^{N_m}\frac{\omega^2(b_j-\omega^2)-i\omega^3 a_j}{(b_j-\omega^2)^2+\omega^2 a_i^2}\cdot c_{pj}\right] Z_T(\omega) + \sum_{j=1}^{N_m}\frac{b_j(b_j-\omega^2)+\omega^2 a_1^2-i\omega^3 a_j}{(b_j-\omega^2)^2+\omega^2 a_j^2}\, v_{pj} + \sum_{j=1}^{N_m}\frac{a_j b_j\omega^2+i\omega b_j(b_j-\omega^2)}{(b_j-\omega^2)^2+\omega^2 a_j^2}\, d_{pj} \tag{7.39}$$

Parametrii v_{pj} și d_{pj} sînt diferențele între deplasările și vitezele modale calculate la începutul și sfîrșitul intervalului de durată T:

$$v_{pj}=\dot{X}_{pj}(T)-\dot{X}_{pj}(0) \tag{7.40}$$

$$d_{pj}=X_{pj}(T)-X_{pj}(0) \tag{7.41}$$

Ecuația (7.41) reprezintă răspunsul modelat în care parametrii a_j, b_j, c_{pj} d_{pj} și v trebuie să fie identificați pentru N_m moduri.

Odată ce acești parametri au fost estimați cu intrarea $\ddot{Z}_g(t)$ pentru intervalul de la $t=0$ la $t=T$ cunoscut, vitezele și deplasările modale ale structurii, $X_{pj}(0)$ și $\dot{X}_{pj}(0)$, se calculează simplu. Mai întîi se calculează răspunsul forțat cu condițiile inițiale. Vitezele și deplasările forțate la momentul T se scad din d_{pj} și v_{pj} pentru a obține răspunsul vibrațiilor proprii d^*_{pj} și v^*_{pj}. Se obțin următoarele expresii analitice pentru răspunsul vibrațiilor proprii la momentul T în funcție de deplasările și vitezele modale, $X_{pj}(0)$, $\dot{X}_{pj}(0)$.

$$d^*_{pj}=\exp\left(-\frac{1}{2}a_jT\right)\left[X_{pj}(0)\cos\sqrt{b_j-\frac{1}{4}a_j^2}\,T+\right.$$

$$\left.+\frac{\left[\dot{X}_{pj}(0)+\frac{1}{2}a_jX_{pj}(0)\right]}{\sqrt{b_j-\frac{1}{4}a_j^2}}\sin\sqrt{b_j-\frac{1}{4}a_j^2}\,T\right] \tag{7.42}$$

$$v^*_{pj}=\exp\left(-\frac{1}{2}a_jT\right)\dot{X}_{pj}\cos\sqrt{b_j-\frac{1}{4}a_j^2}\,T-$$

$$-\frac{\left[\frac{1}{2}a_j\dot{X}_{pj}(0)+b_jX_{pj}(0)\right]}{\sqrt{b_j-\frac{1}{4}a_j^2}}\sin\sqrt{b_j-\frac{1}{4}a_j^2}\,T \tag{7.43}$$

7.2.2. Criteriul erorii și algoritmul de identificare general

Identificarea este realizată, obținînd parametrii prin minimizarea pătratului diferenței între transformata răspunsului structurii (7.39) și transformata răspunsului în accelerație măsurat pe o bandă de frecvența specificată.

Astfel, se cere minimizarea funcționalei :

$$J=\sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}}|A(l\Delta\omega)-A_{pT}(l\Delta\omega)|^2 \tag{7.44}$$

în raport cu parametrii a_j, b_j, c_{pj}, d_{pj} și $\nu_{pj}(i=1,\ldots N_m)$ unde N_m sînt modurile structurii. În relația (7.44) A_p este transformata Fourier finită discretă a răspunsului în accelerație măsurat, A_{pT} este transformata răspunsului structurii dat de (7.39), $\Delta\omega=2\pi/T$ și $0<l_{\min}<l_{\max}\leqslant N-1$. În prezentarea rezultatelor se preferă însă utilizarea unei erori normalizate, E. E este definită ca fiind raportul între eroarea medie pătratică și media pătratică a răspunsului, luate pe aceiași bandă de frecvență și pe același segment măsurat

$$E=\sum_{l_{\min}}^{l_{\max}}|A(l\Delta\omega)-A_{pT}(l\Delta\omega)|^2\Big/\sum_{l_{\min}}^{l_{\max}}|A(l\Delta\omega)|^2 \tag{7.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

Un criteriu eroare similar în domeniul de frecvență a fost utilizat de P. Ibanez în aplicațiile testate pentru vibrații. Conform teoremei lui Parseval, rezultă că criteriul eroare din (7.44) este identic cu minimizarea pătratului diferenței între răspunsul în accelerație al structurii și accelerația măsurată în domeniul timpului, dacă toate punctele de frecvență (FFT) sînt utilizate la identificare. Utilizînd un criteriu echivalent în domeniul timpului J. L. Beck a dezvoltat două tehnici de identificare pentru minimizarea pătratului unei diferențe în scopul determinării parametrilor modali liniari. El a aplicat tehnicile date pentru accelerațiile măsurate în două clădiri în timpul cutremurului de la San Fernando. O trăsătură importantă a studiului este că datele utilizate pentru identificare sînt părțile reale și imaginare ale transformatei Fourier rapide ale unui segment neînregistrat de durată T a accelerației măsurate și segmentul corespunzător al răspunsului înregistrat. Orice netezire a transformatei introduce devieri în estimarea parametrilor, ca și în înregistrările făcute ale porțiunilor finale și inițiale ale accelerației. Astfel, porțiunile neînregistrate, nenetede și timpuri și parțiale produc extrem de sărace funcții de transfer pentru estimarea parametrilor prin amplificare, rezonanța obișnuită și metode de semi-putere.

Studiul efectuat de G. H. McVerry, în cazul general, prezentat aici conduce la obținerea unor valori precise ale parametrilor.

Minimizarea lui J din (7.44) este realizată utilizîndu-se o metodă iterativă de tip Gauss-Newton pentru rezolvarea sistemului de ecuații algebrice neliniare care rezultă prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale ale lui J în raport cu parametrii. Algoritmul are avantajul că ecuațiile sînt limniare în raport cu coeficienții de participare modală, diferențele de viteză și deplasare modală. Tehnica asigură că eroarea se reduce în fiecare iterație. În cele ce urmează, indicele p care indică dependența de poziție este suprimat. Fie

$$\gamma^T=(a_1, \ldots, a_{N_m}, b_1, \ldots b_{N_m}, c_1, \ldots, c_{Nm}, d_1, \ldots, d_{N_m}, \nu_1, \ldots, \nu_{N_m}) \tag{7.46}$$

Minimul local al lui J în raport cu parametrii lui γ este dat de :

$$\frac{dJ}{d\gamma}=0 \tag{7.47}$$

iar matricea derivatelor de ordinul doi

$$\nabla_\gamma(\nabla_\gamma J)=\left[\frac{\partial^2 J}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}\right], \quad i=1, \ldots, 5N_m, \; j=1, \ldots, 5N_m \tag{7.48}$$

trebuie să fie pozitiv definită.

Ecuațiile exprimate de (7.47) au forma :

$$\frac{\partial J}{\partial\gamma_i}=0=-2\sum_{l=l_{\min}}^{l=l_{\max}}\left\{Re[A(l\Delta\omega)-A_T(l\Delta\omega)]\;Re\left[\frac{\partial A_T(l\Delta\omega)}{\partial\gamma_i}\right]+\right. \tag{7.49}$$
$$\left.+Im\;[A(l\Delta\omega)-A_T(l\Delta\omega)]\times Im\left[\frac{\partial A_T(L\Delta\omega)}{\partial\gamma_i}\right]\right\}$$

Sistemul de ecuații

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0\;;\quad\frac{\partial J}{\partial b}=0 \tag{7.50}$$

este neliniar în raport cu toți parametrii din γ. Însă, ecuațiile

$$\frac{\partial J}{\partial c}=0, \quad \frac{\partial J}{\partial d}=0, \quad \frac{\partial J}{\partial v}=0 \tag{7.51}$$

sînt liniare în parametrii c, d şi v, deşi neliniare în a şi b.

Aceasta sugerează că algoritmul are două părţi iterative, avînd avantajul liniarităţii ecuaţiilor (7.51) în raport cu c, d şi v. Mai întîi se face o estimare iniţială pentru toţi parametrii. Apoi ecuaţiile neliniare (7.50) sînt rezolvate aproxiamtiv prin metoda modificată Gauss-Newton pentru a obţine valorile lui a şi b. Ecuaţiile liniare (7.51) sînt rezolvate exact pentru c, d şi v corespunzător valorilor lui a şi b. Procesul se repetă pînă ce criteriul de convergenţă selectat este satisfăcut.

a) **Algoritmul de identificare**

Se notează parametrii care apar neliniari în expresia A_T prin

$$\alpha^T=(a_1,\ldots,a_{N_m}, b_1,\ldots,b_{N_m})$$

iar parametrii care apar liniari prin

$$\beta^T(c,\ldots,c_{N_m}, d_1,\ldots,d_{N_m}, v_1,\ldots,\ldots,v_{N_m})$$

Vectorul complet al parametrilor se notează

$$\gamma^T=(\alpha^T, \beta^T)$$

Se defineşte matricea Hessiana a derivatelor parţiale a lui J în raport cu parametrii α astfel

$$(PH)_{ij}=2\sum_{l_{\min}}^{l_{\max}}\left\{Re\left(\frac{\partial A_T(l\Delta\omega)}{\partial\alpha_i}\right)Re\left(\frac{\partial A_T(l\Delta\omega)}{\partial\alpha_j}\right)+Im\left(\frac{\partial A_T(l\Delta\omega)}{\partial\alpha_i}\right)Im\left(\frac{\partial A_T(l\Delta\omega)}{\partial\alpha_j}\right)\right\},$$

$$i,\ j=1,\ldots,2N_m$$

Paşii algoritmului de la iteraţia k la $k+1$:

1. Pentru prima iteraţie se face o estimare iniţială a tuturor parametrilor iar pentru celelalte iteraţii se folosesc valorile anterioare.

2. Se rezolvă

$$[PH(\gamma^k)]\Delta\alpha^{k+1}=-\frac{\partial J(\gamma^k)}{\partial\alpha}$$

şi se obţine $\Delta\alpha^{k+1}$. Aceasta este formula Gauss-Newton pentru $\partial J/\partial\alpha=0$.

Ea se bazează pe dezvoltarea de prim ordin a seriei Taylor a lui $A_T(\alpha, \beta^k, \omega)$ în jurul lui α^k în expresia J.

3. Se efectuează o cercetare liniară pentru minimul lui J în direcţia, $\Delta\alpha^{k+1}$ găsindu-se s şi α_s^{k+1} corespunzător,

$$\alpha_s^{k+1}=\alpha^k+s\Delta\alpha^{k+1}.$$

Cercetarea liniară este implementată prin considerarea incrementelor succesive ale lui s (obişnuit 1/2) se găseşte α_{si}^{k+1} corespunzător lui $s=s_i$ şi se rezolvă β_{si}^{k+1} respectiv din

$$\frac{\partial J(\alpha_{si}^{k+1})}{\partial\beta}=0$$

J_{si} este evaluat pentru $(\alpha_{si}^{k+1}, \beta_{si}^{k+1})$ şi procesul continuă pînă ce J_{si+1} creşte faţă de J_{si}. La începutul cercetării liniare J_{so}, pentru $s_0=0$ este cunoscut din parametrii iteraţiei precedente (α^k, β^k). Cercetarea liniară se termină cu trei valori succesive

astfel încît $J_{si} < J_{si-1}$ și $J_{si} < J_{si+1}$ pentru $s_{i-1} < s_i < s_{i+1}$ astfel ca minimul lui J în direcția $\Delta\alpha^{k+1}$ este între s_{i-1} și s_{i+1}.

Se face o interpolare parabolică în s prin trei puncte și se evaluează $s = s_{min}$ minimul corespunzător al parabolei. Sînt determinate valorile finale $(\alpha^{k+1}, \beta^{k+1})_{min}$ și se calculează J^{k+1}. Dacă J_{s1} este mare în raport cu J_{s0}, cercetarea se realizează înjumătățind incrementul s interpolînd parabola prin trei puncte.

4. Se alege un criteriu de convergență. Dacă variațiile fracționare între k și $k+1$ pentru toți a_i, b_i și c_i sînt mai mici decît toleranța prescrisă, se consideră că s-a obținut convergența și iterarea se oprește ; dacă nu, procesul iterativ se repetă.

Identificarea arată că metoda converge la estimări reale ale parametrilor cu condiția ca toate modurile incluse în model să contribuie semnificativ la răspuns. Parametrii modurilor joase au în general o convergență foarte rapidă și chiar cînd convergența este dificilă pentru modurile superioare, estimarea parametrilor pentru modurile joase apar puțin afectate.

Cum rezultă din exemplul care urmează tehnica prezintă excelente estimări ale parametrilor pentru toate modurile superioare ale structurii.

Estimările parametrilor modurilor superioare sînt alterate de orice frecvență superioară modului neglijat ; S-au realizat de către M.C. Verry analize ale senzitivității pentru determinarea preciziei relative ale estimărilor diverșilor parametri și investigări ale gradului de cuplare între diferiți parametri. Aceste analize s-au bazat pe dezvoltări ale erorii în serie Taylor în parametri în jurul valorilor optime. Cum primele derivate ale lui J în raport cu parametrii sînt zero pentru valorile optime, termenul următor în dezvoltare are forma pătratică și deci implică matricea derivatelor de ordinul doi în raport cu parametrii. O aproximare a matricei derivatelor de ordinul doi este matricea de senzitivitate S, utilizată în analize.

Senzitivitatea erorii la diferiți parametri, și deci precizia lor de estimare, depinde în mare măsură de elementele diagonale ale matricei de senzitivitate. Rapoartele între termenii nediagonali și cei diagonali, numite coeficienți de interacțiune, controlează gradul de cuplare între estimări.

Un coeficient de interacțiune zero înseamnă că estimările a doi parametri sînt necuplate în timp ce valoarea unitate reprezintă o cuplare completă cu o dependență liniară între parametri. Cuplarea devine importantă pentru coeficienții de interacțiune mai mari de 0,6.

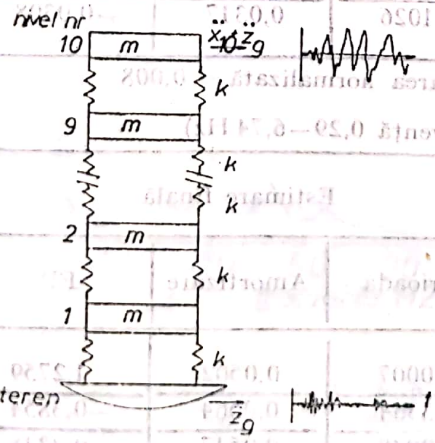


Fig. 7.2

Exemplul 7.3 Structura uniformă cu 10 nivele

Drept test pentru algoritmul de identificare, s-au estimat parametrii unei structuri uniforme cu 10 nivele pentru datele simulate generate pentru răspunsul pentru primele 10 sec. ale componentei Nord-Sud a cutremurului El-Centro, ca în fig. 7.2. Proprietățile modale ale structurii sînt prezentate în Tabelul 7.1. împreună cu rezultatele încercărilor folosind modele cu patru și șase moduri.

Scanned with OKEN Scanner

A fost efectuată transformata Fourier a răspunsului în accelerație ale maselor în banda de frecvențe 0,3 Hz. la 13,6 Hz, care acoperă un interval semnificativ al răspunsului dinamic. Valorile inițiale ale parametrilor pentru analiză au fost estimate prin examinarea modulului funcției de transfer calculate.

Tabelul 7.1

Parametrii structurii uniforme cu 10 nivele utilizați pentru testul de simulare al tehnicii de identificare

Modul	Valorile reale ale parametrilor			
	Perioada s	Frecvența Hz	Amortizarea	Coeficientul efectiv de participare (FP) etajul 10
1	1,0000	1,0000	0,05	1.2673
2	0,3358	2,9780	0,05	−0,4068
3	0,2045	4,8900	0,05	0,2259
4	0,1495	6,6890	0,05	−0,1429
5	0,1199	8,3403	0,05	0.0934
6	0,1019	9,8135	0,05	−0,0601
7	0,0904	11,0619	0,05	0,0366
8	0,0829	12,0627	0,05	−0,0199
9	0,0782	12,7877	0,05	0,0087
10	0,0756	13,2275	0,05	−0,0021

Identificarea cu șase moduri (banda de frecvențe 0,29—13,6Hz)

Modul	Estimare inițială (din funcția de transfer)			Estimare finală		
	Perioada	Amortizare	FP	Perioada	Amortizare	FP
1	1,00	0,06	1,25	1,0007	0,0501	1.2749
2	0,31	0,06	−0,45	0,3364	0,0565	−0,3865
3	0,20	0,07	0,35	0,2047	0,0521	0,2229
4	0,14	0,09	−0,25	0,1496	0,0535	−0,1344
5	0,12	0,10	0,15	0,1201	0,0508	0,0860
6	0,10	0,07	−0,07	0,1026	0,0317	−0,0308

eroarea normalizată = 0,108 eroarea normalizată = 0,008

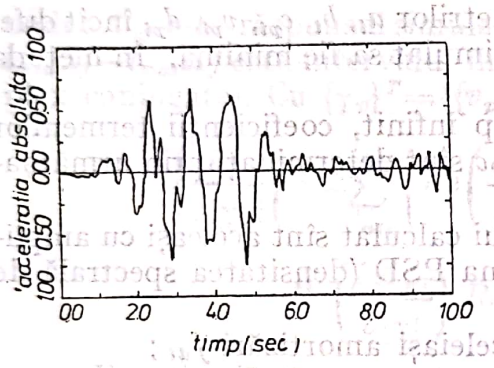
Identificarea cu patru moduri (banda de frecvență 0,29—6,74 Hz)

Modul	Estimare inițială			Estimare finală		
	Perioada	Amortizare	FP	Perioada	Amortizare	FP
1	1,120	0,038	1,25	1,0007	0,0502	1,2759
2	0,373	0,038	−0,35	0,3364	0,0564	−0,3854
3	0,224	0,038	0,18	0,2048	0,0517	0,2218
4	0,160	0,038	−0,14	0,1507	0,0394	−0,0959

Funcția de transfer este următoarea :

$$H(\omega)=\frac{b_j-\omega^2-i\omega a_j}{(b_j-\omega^2)^2+\omega^2 a_j^2}$$

Estimările inițiale ale perioadelor naturale sînt apropiate de valorile adevărate, dar unele mărimi estimate ale amortizării și coeficienților de participare au o eroare de 100%. În timpul identificării, eroarea normalizată a fost redusă de la 0,108 pentru estimarea inițială la valoarea finală de 0,008. Nici o eroare nu a fost detectată în evoluția în timp a accelerației (fig. 7.3). Estimările parametrilor pentru toate cele șase moduri au fost apropiate de valorile adevătate. Rezultatele identificărilor pentru moduri cu erori în estimările inițiale, alese în mod deliberat, au fost prezentate în tabelul 7.1. Exemplul prezentat ilustrează dominarea modurilor joase în răspunsul seismic al acestui tip de structură.



Răspunsul în accelerație pentru structura uniformă cu zece etaje utilizată în testul de simulare al tehnicii de identificare.

Fig. 7.3

Viteza este mai senzitivă la modurile superioare decît deplasarea dar modelul optim cu patru moduri a dat rezultate apropiate de valorile reale.

Încercările de a realiza identificarea pentru mai mult de șase moduri nu au avut succes. Din cauza conținutului în frecvențe limitat al intrării, au fost detectate numai șase vîrfuri modale în funcția de transfer a răspunsului simulat iar modelele cu mai mult de șase moduri au condus invariabil la estimări nereale și neconvergente ale parametrilor modurilor superioare (fig. 7.4). Testele cu date simulate arată că în vecinătatea situațiilor ideale algoritmul de identificare produce estimări precise ale parametrilor și are rezultate excelente în domeniile de timp și frecvență. Metoda se poate aplica pentru seismele reale.

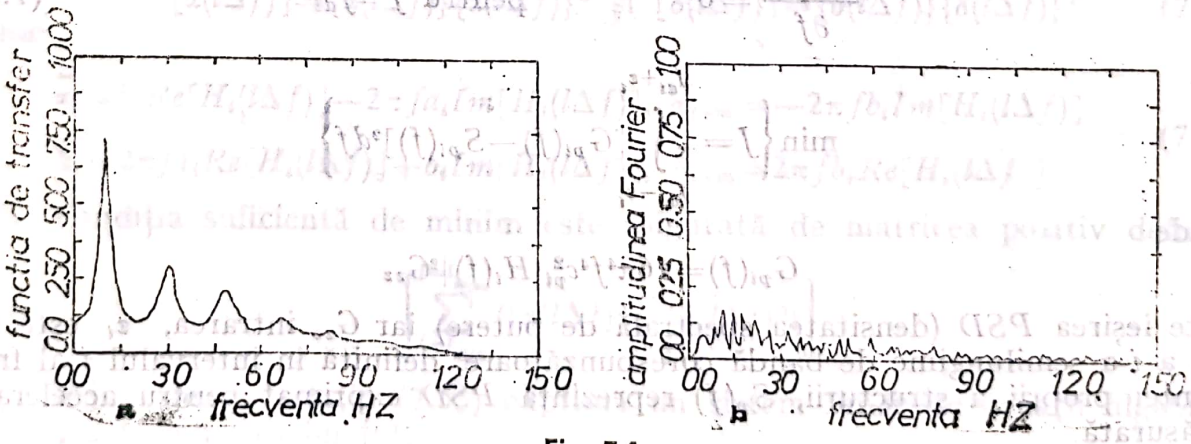


Fig. 7.4

a) Modulul funcției de transfer calculat pentru modulul neted al ferestrei Hanning al intrării și răspunsului simulat ; b) Modulul transformatei netede a accelerației terenului ; c) Modulul transformatei accelerației răspunsului simulat ; d) Modulul transformatei accelerației răspunsului modelului optim cu șase moduri.

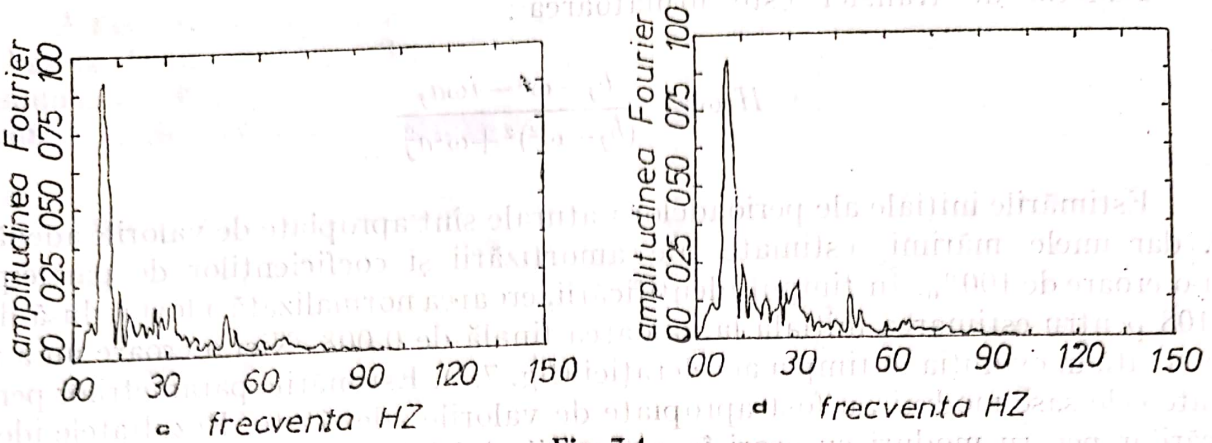


Fig. 7.4

7.1.3. Algoritmul de identificare M. Di Paola, V. F. Poteraşu, G. Muscolino

Acest algoritm constă în identificarea parametrilor a_i, b_i, c_{pi}, v_{pi}, d_{pi} încît diferența între răspunsul calculat şi cel măsurat sau simulat să fie minimă. În metoda propusă se fac următoarele observații :

Dacă măsurătorile sînt considerate în timp infinit, coeficienții termenilor v_{pi} şi d_{pi} îşi pierd semnificația iar parametrii a, b, c sînt determinați prin următoarele condiții simultane :

a) amplitudinile de rezonanță ale răspunsului calculat sînt aceleaşi cu amplitudinile măsurate ale răspunsului simulat în forma PSD (densitatea spectrală de putere) ;

b) amplitudinile corespund la frecvența aceleiaşi amortizări f_{di} ;

c) energia cuprinsă într-o bandă semnificativă a vîrfurilor răspunsului calculat (la rezonanță) este aceiaşi cu a răspunsului măsurat sau simulat.

Din condițiile de mai sus, se obține un sistem cu $3\times i$ ecuații şi $3\times i$ necunoscute (i fiind numărul de moduri considerat). Din punct de vedere matematic, condițiile pentru a_i, b_i, c_{pi} se pot scrie în forma ($\omega=2\pi f$) :

$$G_{pi}(f)=S_{pi}(f) \qquad \text{pentru } f=f_{di}$$

$$\frac{\partial G_{pi}(f)}{\partial f}=0 \qquad \text{pentru } f=f_{di} \tag{7.52}$$

$$\min\left\{J=\int_{f_{di}-\varepsilon_i}^{f_{di}+\varepsilon_i}[G_{pi}(f)-S_{pi}(f)]^2 df\right\}$$

unde

$$G_{pi}(f)=16\pi^4 f^4 c_{pi}^2 |H_i(f)|^2 G_{zz}$$

este ieşirea PSD (densitatea spectrală de putere) iar G_{zz} intrarea, ε_i este cea de a i-a semilungime de bandă corespunzătoare, definită în intervalul i al frecvenței proprii a structurii, $S_p(f)$ reprezintă PSD exprimat pentru accelerația măsurată.

Dacă intrarea este un zgomot alb (în domeniul temporal impulsul Dirac $\delta(t)$), relațiile (7.52) au valorile :

$$b_i=4\pi^2 f^2\sqrt{1-c_{pi}^2/S_{pmax}^{(i)}}$$

$$a_i = \sqrt{\frac{4\pi^2 f^2 c_{pi}^2}{S_{pmax}^{(i)}} - \frac{(b_i - 4\pi^2 f^2)^2}{4\pi^2 f^2}}, \quad c_{pi} = \pm \sqrt{\int_{f_{di}-\varepsilon_i}^{f_{di}+\varepsilon_i} [S_p(f)/G_p(f)]df} \tag{7.53}$$

Sistemul de mai sus constînd din ecuații neliniare este rezolvat printr-o metodă iterativă. Aici, $S_{pmax}^{(i)} = S_p(f_{di})$ este *PSD* maxim pentru frecvența de amortizare i. Relațiile (7.52) și (7.53) dau o coincidență cvasi-exactă pentru *PSD* într-un interval din vecinătatea frecvenței de amortizare a structurii.

Semnele lui c_{pi} definite de forma curbei răspuns și de (7.53) sînt simbolice. Conform ipotezelor de mai sus, se determină $2 \times i$ parametri v_{pi}, d_{pi} prin minimizarea expresiei

$$J = \sum_{l=l_{max}}^{l_{max}} [A_{pT}(l\Delta f) - A_{ef}(l\Delta f)][\overline{A}_{pT}(l\Delta f) - \overline{A}_{ef}(l\Delta f)] \tag{7.54}$$

unde: A_{ef} este răspunsul simulat sau măsurat, Δf este intervalul de eșantionare, $l_{min}\Delta f - l_{max}\Delta f$ este intervalul măsurat (simbolurile supraliniate indică valori complex conjugate). Cu $\{\gamma_p\}^T = \{\{v_p\}^T \{d_p\}^T\}$ condiția necesară de minim este dată de

$$\left\{\frac{\partial J}{\partial \{\gamma_p\}}\right\} = 2 \sum_{l_{min}}^{l_{max}} \left\{ Re\left(\frac{\partial A_{pT}}{\partial \{\gamma\}}\right) Re(A_{pT}) + Im\left(\frac{\partial A_{pT}}{\partial \{\gamma\}}\right) Im(A_{pT}) - \right.$$
$$\left. - Re\left(\frac{\partial A_{pT}}{\partial \{\gamma\}}\right) Re(A_{ef}) - Im\left(\frac{\partial A_{pT}}{\partial \{\gamma\}}\right) Im(A_{ef}) \right\} = \{0\} \tag{7.55}$$

Ecuația (7.55) se scrie în formă matricială astfel:

$$\left[\sum_{l=l_{min}}^{l=l_{max}} ([\alpha(l\Delta f)] + [\delta(l\Delta f)])\right] \{\gamma\} = \left\{\sum_{l=l_{min}}^{l=l_{max}} (\beta(l\Delta f)\{\tilde{\alpha}(l\Delta f)\} + \varepsilon(l\Delta f)\{\tilde{\delta}(l\Delta f)\})\right\} \tag{7.56}$$

unde matricele $[\alpha(l)]$ și $[\delta(l)]$ sînt de ordinul $2m \times 2m$ iar vectorii $\{\tilde{\alpha}(l)\}$, $\{\tilde{\delta}(l)\}$ sînt $2m \times 1$, $\{\gamma\}$ fiind vectorul necunoscutelor.

$$[\alpha(l\Delta f)] = \{\tilde{\alpha}(l\Delta f)\}\{\tilde{\alpha}(l\Delta f)\}^T \text{ și } [\delta(l\Delta f)] = \{\tilde{\delta}(l\Delta f)\}\{\tilde{\delta}(l\Delta f)\}^T \tag{7.57}$$

unde

$$\tilde{\alpha}_i = b_i Re[H_i(l\Delta f)] - 2\pi f a_i Im[H_i(l\Delta f)], \quad \tilde{\alpha}_{i+m} = -2\pi f b_i Im[H_i(l\Delta f)]$$
$$\tilde{\delta}_i = 2\pi f a_i Re[H_i(l\Delta f)] + b_i Im[H_i(l\Delta f)], \quad \tilde{\delta}_{i+m} = 2\pi f b_i Re[H_i(l\Delta f)] \tag{7.58}$$

Condiția suficientă de minim este asigurată de matricea pozitiv definită

$$\left[\sum_{l=l_{min}}^{l=l_{max}} ([\alpha(l\Delta f)] + [\delta(l\Delta f)])\right]$$

Prin urmare, relația (7.55) exprimă un sistem liniar de ecuații algebrice pentru determinarea lui $\{\gamma\}$.

Algoritmul utilizat are următorii pași: mai întîi se determină parametrii a_i, b_i, c_{pi}, *PSD* pentru modul p măsurat; în al doilea rînd se rezolvă sistemul de ecuații algebrice liniare pentru determinarea parametrilor, v_{pi}, d_{pi} prin minimizarea diferenței între răspunsul calculat și răspunsul simulat sau măsurat.

Scanned with OKEN Scanner

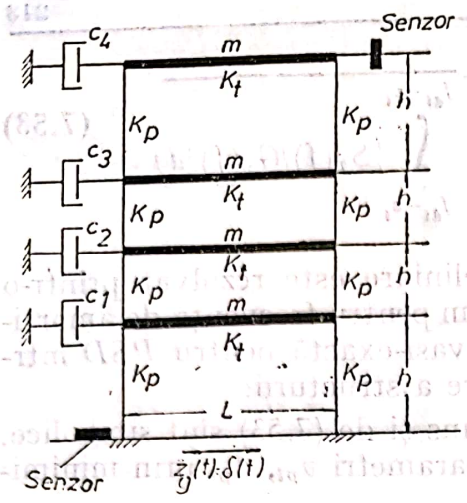


Fig. 7.5

Exemplul 7.4. Metoda de identificare se exemplifică pentru un cadru plan excitat de un impuls Dirac $\delta(t)$ la bază. Caracteristicile structurii sînt prezentate în fig. 7.5. Se identifică parametrii sistemului pentru răspunsul exprimat în funcție de accelerația relativă a nivelului 4. Figura 7.6 reprezintă *PSD* pentru răspunsul calculat și cel simulat. Parametrii a_i, b_i, c_{pi} sînt calculați cu relațiile (7.52).

Figurile 7.7 și 7.8 dau, respectiv, părțile reală și imaginară ale transformatei Fourier a răspunsului, comparînd cel efectiv (simulat) cu cel calculat, prin impunerea fie a condițiilor pentru a_i, b_i, c_{pi} sau a celor pentru v_{pi}, d_{pi}.

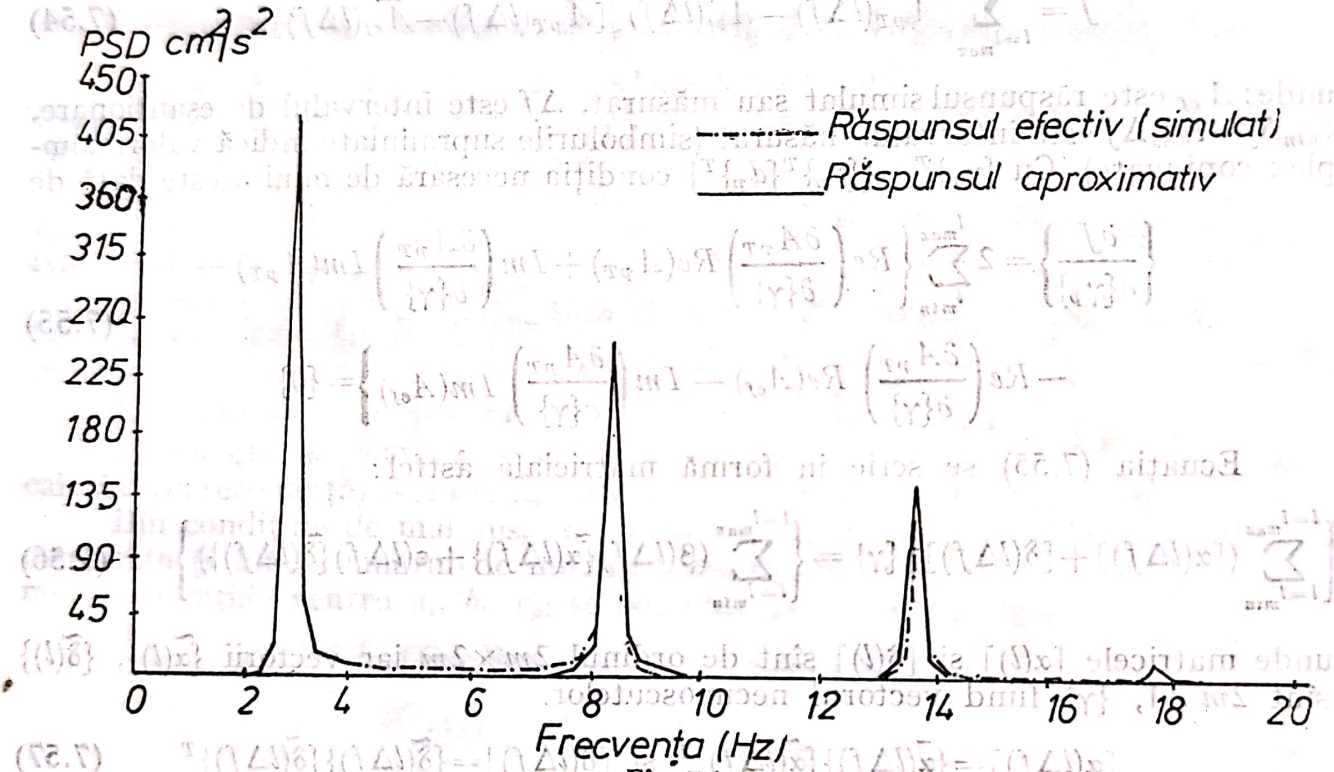


Fig. 7.6

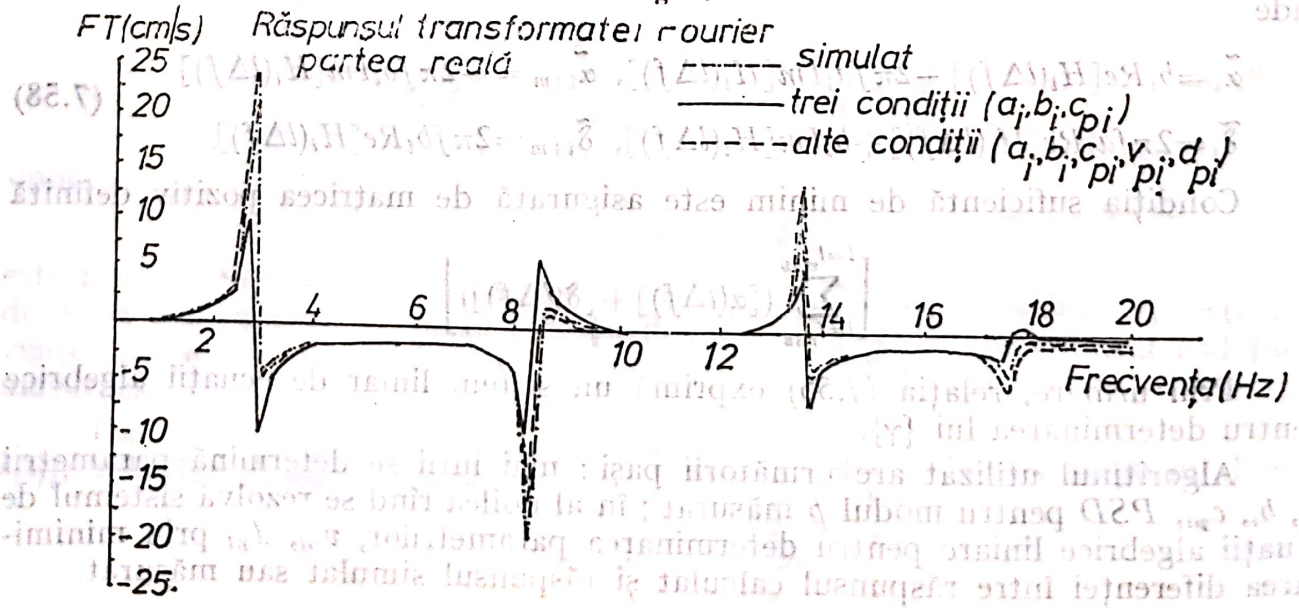


Fig. 7.7

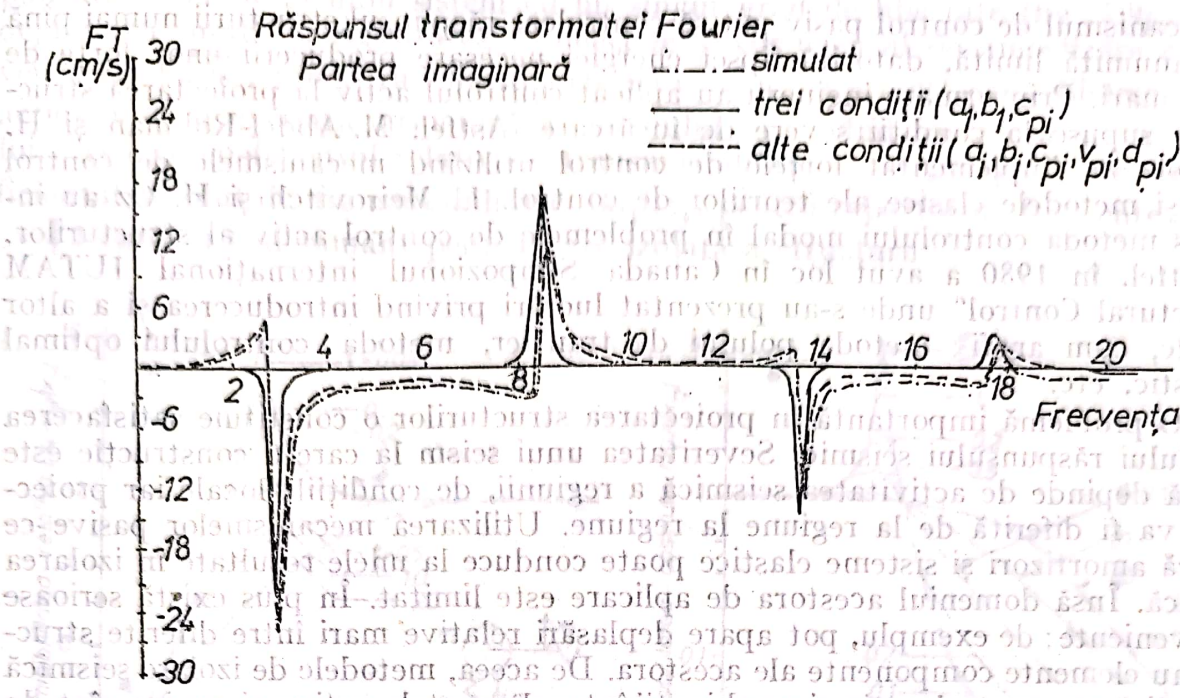


Fig. 7.8

Coeficienții sînt prezentați în tabela 7.2.

Tabela 7.2

Moduri	a_i	b_i	c_i^2	ξ_{ai}	ω_{ai}	c_{pi}	v_{pi}	d_{pi}
1	1,085	309,09	1,558	3,09%	17,581	−1,248	0,0431	0,0719
2	1,269	2 770,82	0,142	1,20%	52,638	0,377	0,0678	$-7{,}15\times10^{-3}$
3	1,080	7 376,62	0,023	0,63%	85,887	−0,011	$8{,}30\times10^{-3}$	$1{,}538\times10^{-3}$
4	1,745	12 308,33	$2{,}90\times10^{-3}$	0,78%	110,943	0,054	0,0205	$5{,}592\times10^{-4}$

$c_1=c_3=c_4=5$ daN s/cm ; $c_2=8$ daN s/cm; $m=5{,}097$ daN s²/cm
$K_p=(30\times30)$ cm, $K_t=(30\times50)$ cm; $h=300$ cm ; $L=400$ cm ; $E=310\,000$ daN/cm²
$\omega_1=17\,583$ rad/s; $\xi_1=3{,}08\%$; $\omega_2=52\,691$ rad/s ; $\xi_2=1{,}14\%$
$\omega_3=85\,853$ rad/s, $\xi=0{,}58\%$; $\omega_4=111\,159$ rad/s $\xi=0{,}54\%$

7.3 Controlul optim activ al structurilor

Aplicațiile teoriilor de control activ în structurile inginerești acționate seismic sau de vînt prezintă un deosebit interes. Controlul structurilor a fost introdus în scopul obținerii unei siguranțe sporite pentru perioada de serviciu a structurilor și al optimizării din punct de vedere al stadardelor, contribuind astfel la progresul tehnologiei construcțiilor. În cursul cercetărilor s-a demonstrat că forțele active de control reprezintă o cale eficientă pentru controlul vibrațiilor structurilor inginerești flexibile. Principalele probleme întîlnite în controlul structurilor se referă la proiectarea corespunzătoare a parametrilor de control și la interacțiunea între sistemul de control și structură. Pentru generarea forțelor de control se utilizează mecanisme pasive sau active. Forțele de control generate

de mecanismul de control pasiv pot să controleze răspunsul structurii numai pînă la o anumită limită, datorită lipsei energiei necesare producerii unor forțe de valori mari. Prin urmare inginerii au aplicat controlul activ la proiectarea structurilor supuse la condiții severe de încărcare. Astfel, M. Abdel-Rohman și H. Leipholz au implementat forțele de control utilizînd mecanismele de control activ și metodele clasice ale teoriilor de control. L. Meirovitch și H. Oz au introdus metoda controlului modal în problemele de control activ al structurilor. De altfel, în 1980 a avut loc în Canada Simpozionul internațional IUTAM „Structural Control" unde s-au prezentat lucrări privind introducerea și a altor metode, cum ar fi : metoda polului de transfer, metoda controlului optimal stohastic, etc.

O problemă importantă în proiectarea structurilor o constituie satisfacerea criteriului răspunsului seismic. Severitatea unui seism la care o construcție este expusă depinde de activitatea seismică a regiunii, de condițiile locale iar proiectarea va fi diferită de la regiune la regiune. Utilizarea mecanismelor pasive ce implică amortizori și sisteme elastice poate conduce la unele rezultate în izolarea seismică. Însă domeniul acestora de aplicare este limitat. În plus există serioase inconveniente: de exemplu, pot apare deplasări relative mari între diferite structuri sau elemente componente ale acestora. De aceea, metodele de izolare seismică ce implică un control activ și combinații între elementele active și pasive sînt de cea mai mare utilitate.

Tehnicile de control activ oferă posibilitatea proiectării unei construcții corespunzătoare tuturor regiunilor seismice ; chiar în regiuni de seismicitate ridicată, se poate avea o bună siguranță fără modificări structurale. Tehnicile de control activ se pot aplica structurilor existente și elementelor lor componente. Bazate pe informația primită de la senzori privind starea reală a sistemului dinamic (deplasările, vitezele și accelerațiile structurii ca și valorile excitației seismice), forțele de control au acțiune cu conexiune inversă (feedback) printr-o izolație elastică de la baza structurii, prin elemente ale structurii sau printr-o combinație între acestea. Această situație nu se poate realiza prin sistemele pasive, în general, forțele care se aplică fiind limitate. Astfel, conceptul de control activ merge mai departe decît controlul pasiv și produce o reducere semnificativă a răspunsului dinamic. Dependența proiectării structurii de variațiile aleatorii ale amplitudinilor și de conținutul în frecvență al unui seism real se diminuează. Devine posibilă proiectarea structurilor în cazul unor excitații seismice superioare. Forțele pot fi aplicate prin actuatori hidraulici sau electromagnetici.

7.3.1. Izolare pasivă

În literatura de specialitate au fost propuse mai multe sisteme de izolare seismică. Utilizarea reazemelor de neopren reduce frecvența fundamentală a sistemului structură-sol cu aproximativ 1 Hz. și aceasta iese astfel din domeniul cuprins între 2 și 8 Hz. unde excitația seismică este cea mai puternică (pentru regiuni cu valori importante ale accelera ei, se adaugă plăci de fricțiune în scopul decuplării bazei structurii de sol și ca urmare a histerezisului rezultat se obține o absorbție de energie). Deși creșterea amortizării vîscoase datorită mecanismului de izolare reduce mărimea deplasărilor relative între bază și sol (ceea ce este de dorit), accelerațiile din structură și în special răspunsul echipamentului (de exemplu construcții de reactoare nucleare) situat în construcție tinde să crească. Aceasta contracarează influența favorabilă a reducerii frecvenței fundamentale asupra răspunsului dinamic. Acest efect este ușor de ilustrat cu ajutorul răs-

punsului dinamic al unui sistem cu un singur grad de libertate (fig. 7.9) avînd deplasarea totală x, rigiditatea k, masa m și coeficientul de amortizare c (frecvența $\omega=\sqrt{k/m}$), procentul din amortizarea critică $\xi=c/2\ \omega m$). Sistemul este acționat de o excitație armonică a terenului x_g avînd frecvența $\bar{\omega}$. Creșterea lui ξ reduce coeficientul relativ de transmisibilitate $|x_t-x_g|/|x_g|$ dar crește coeficientul absolut de transmisibilitate $|x_t|/|x_g|$ pentru raportul de frecvențe $\bar{\omega}/\omega > \sqrt{2}$ care va fi dominant pentru baza izolată a structurii.

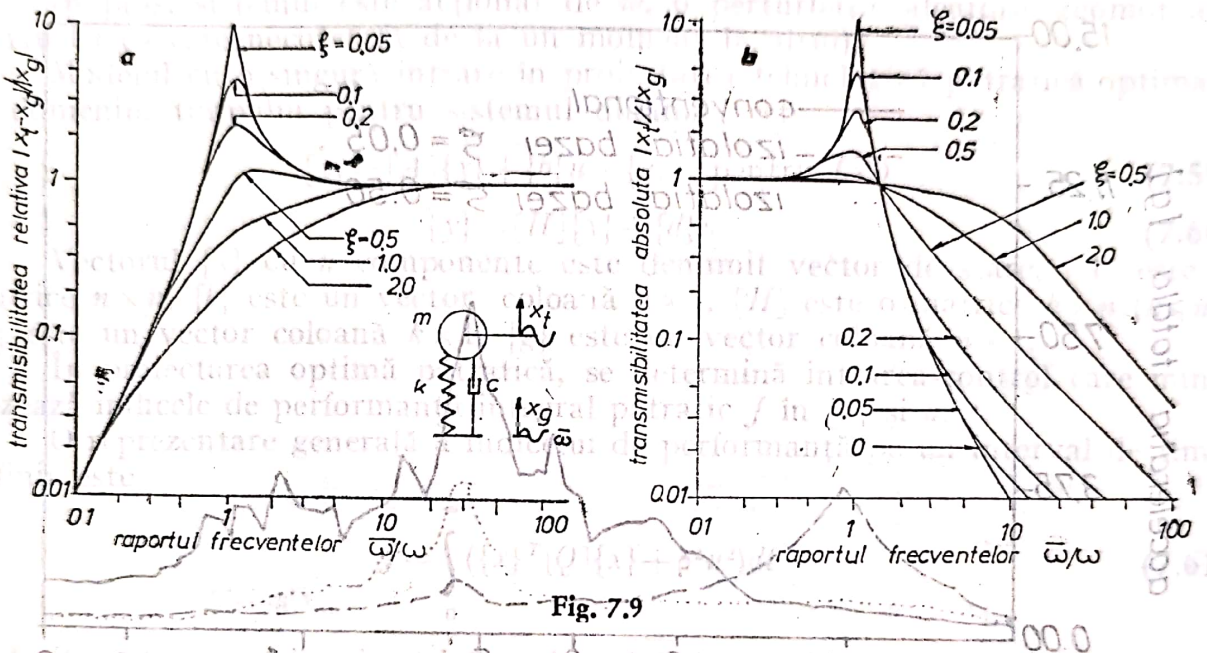


Fig. 7.9

Aceasta se demonstrează pentru o construcție de reactor nuclear acționată de o accelerație seismică artificială orizontală de 0,25 g (linia plină din fig. 7.16). Introducerea unui sistem de izolație constînd dintr-un reazem din neopren ce are frecvența de 1 Hz în direcție orizontală și un procent din amortizarea critică $\xi=0{,}05$ în structura convențională (fig. 7.10) crește deplasarea relativă maximă între extremitatea superioară a vasului de presiune și sol de la 0,011 m la $0{,}10^3$ m și reduce spectrul răspunsului orizontal al aceleiași extremități (fig. 7.11).

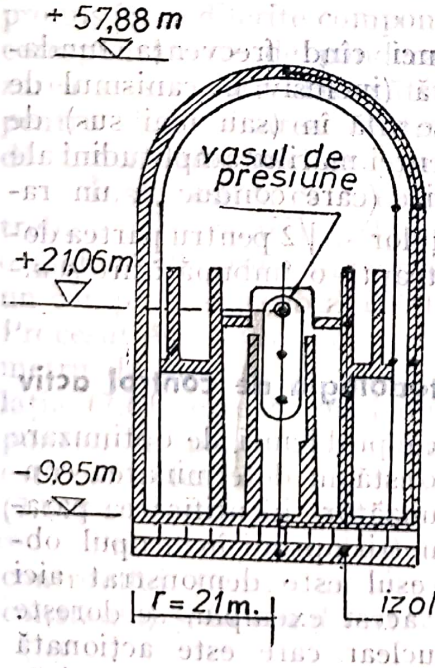


Fig. 710

Creșterea amortizării reazemului de neopren la valoarea (ipotetică) $\xi=0{,}5$ reduce deplasarea relativă maximă la 0,043 m în timp ce vîrful spectrului de răspuns crește iar forma produsă este comparabilă cu cea a structurii convențională.

Sistemele de control activ care acționează în plus față de sistemul de izolare pasiv al bazei, tind de asemeni

să reducă răspunsul structurii și să crească amortizarea efectivă. Măsurînd deplasarea, viteza relativă a bazei structurii și excitația seismică, forțele de control care acționează asupra bazei structurii și fundației simultan cu cele transmise prin izolația de neopren sînt de tipul conexiunii inverse (feedback). Spectrul de răspuns al extremității superioare a vasului de presiune pentru două tipuri de control activ caracterizate prin procentul din amortizarea critică ξ arată că izolația pasivă nu acționează în legătură cu controlul activ pentru reducerea frecvenței fundamentale a sistemului structură-sol (fig. 7.12).

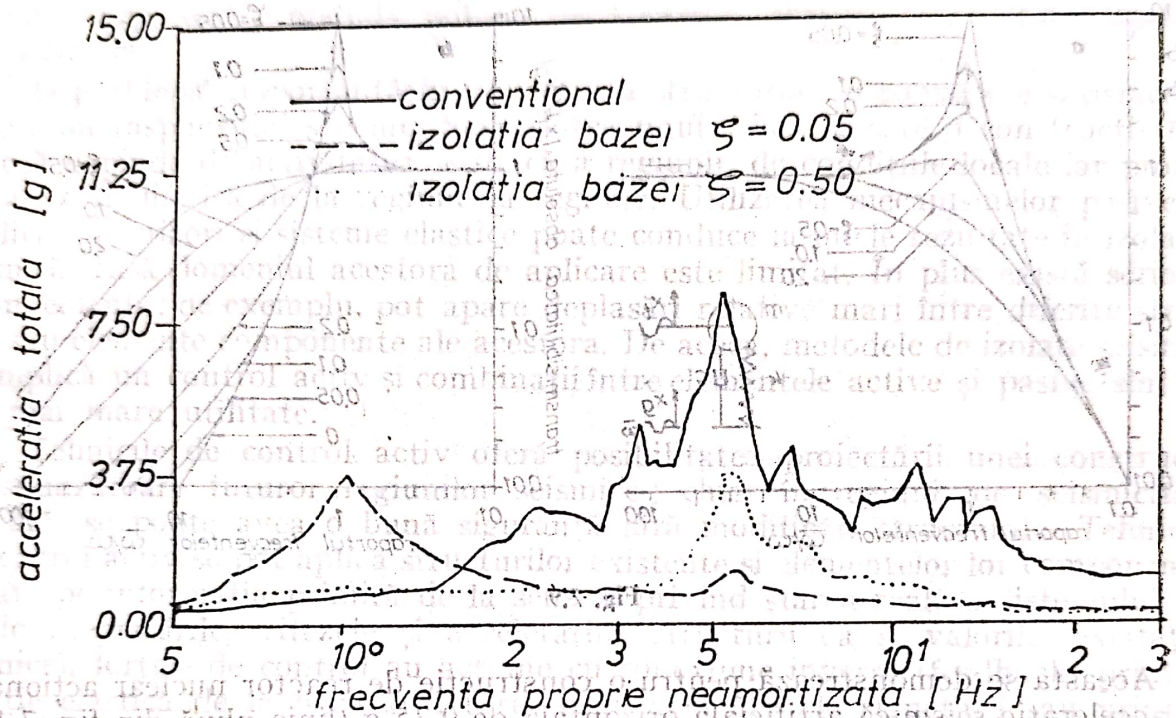


Fig. 7.11

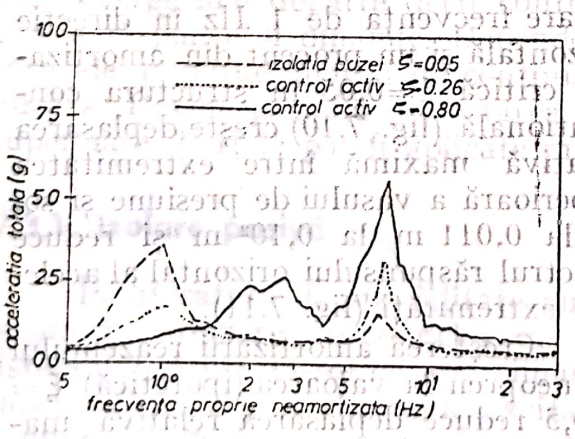


Fig. 7.12

Însă, atunci cînd frecvența fundamentală efectivă (inclusiv mecanismul de control activ) se află în (sau mai sus) de domeniul frecvenței marilor amplitudini ale excitației seismice (care conduc la un raport al frecvențelor $< \sqrt{2}$ pentru partea dominantă) se așteaptă o îmbunătățire semnificativă.

7.3.2. Metodologia de control activ

Formularea problemei de optimizare a controlului constă în determinarea controlului corespunzător, identificarea parametrilor optimi și a relației între structură și parametrii optimi în scopul obținerii răspunsului dorit al sistemului dinamic. Procesul este demonstrat aici pentru un sistem cu un singur grad de libertate. În acest exemplu, se dorește minimizarea deplasării unei construcții de reactor nuclear care este acționată de o accelerație orizontală seismică. Sistemul de control activ utilizat este alcă-

tuit dintr-un sistem de actuatori de forță (cel mai probabil hidraulic) pentru a contracara intrarea aleatorie forțată datorită seismului. Problema de proiectare constă în determinarea controlului de intrare astfel încît sistemul să răspundă favorabil.

Proiectarea unui sistem de control cu o singură intrare, cu controlul de intrare scalar u începe cu caracterizarea sistemului dinamic (G) de ordinul n, avînd k răspunsuri la ieșire $\{y\}=\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}^T$. Sistemul este reprezentat schematic în fig. 7.13.

În plus, sistemul este acționat de w, o perturbație aleatorie zgomot alb (perturbarea este necorelată de la un moment la altul).

Modelul cu o singură intrare în proiectarea tehnologică pătratică optimală în domeniul timpului pentru sistemul dinamic, este

$$\{\dot{x}\}=[A]\{x\}+\{b\}u+\{g\}w \text{ pentru } t\geq 0 \tag{7.59}$$

$$\{y\}=[H]\{x\}+\{d\}u \tag{7.60}$$

Vectorul $\{x\}$ cu n componente este denumit vector de stare, $[A]$ este o matrice $n\times n$, $\{b\}$ este un vector coloană $n\times 1$, $[H]$ este o matrice $k\times n$ $(k\leqslant n)$, $\{d\}$ este un vector coloană $k\times 1$, $\{g\}$ este un vector coloană $n\times 1$.

În proiectarea optimă pătratică, se determină intrarea-control care minimizează indicele de performanță integral pătratic J în $\{x\}$ și u.

O reprezentare generală a indicelui de performanță pe un interval de timp infinit este

$$J=\int_0^\infty (\{x\}^T[Q]\{x\}+\rho^2u^2)dt \tag{7.61}$$

unde $[Q]$ este o matrice simetrică pozitiv definită, numită matrice de ponderare, iar ρ este un parametru scalar de ponderare.

Motivarea expresiei indicelui de performanță este fizică și ea cere ca răspunsul să fie minim în sensul integralei pătratice. Atunci se realizează un compromis între diferite componente ale vectorului răspuns prin ajustarea elementelor corespunzătoare de ponderare din $[Q]$. Principalul beneficiu obținut prin utilizarea acestei formulări pătratice este acela că algoritmii de minimizare existenți pentru determinarea controlului optimal u operează automat și independent de dimensiune (inclusiv numărul de intrări).

Însă, pentru ca sistemul de control rezultat să satisfacă performanța dorită trebuie ca parametrii $[Q]$ și ρ să fie bine definiți. Adesea, această precizare cere o metodă de proiectare prin încercări sau o cercetare parametrică pentru a avea un compromis acceptabil între răspunsul obținut și energia de control consumată. Procesul este ajutat de parametrul scalar de ponderare ρ care devine un parametru de proiectare cheie. În această procedură, matricea de ponderare din relația (7.61) este în mod obișnuit fixată, reflectînd dorința de a minimiza răspunsul. Se poate determina o soluție analitică pentru controlul optimal (care este controlul ce optimizează J) prin aplicarea calculului variațional funcționalei (7.61) cu restricția (7.59).

Procedeul de calcul se găsește în orice lucrare privind teoria modernă a controlului. Pentru un sistem staționar (unde matricea $[A]$ și vectorul $\{b\}$ sînt constante) și în cazul intervalului de timp infinit, controlul optimal este dat de :

$$u=-(K)\{x\} \tag{7.62}$$

$$(K)=\rho^{-2}\{b\}^T[P] \tag{7.63}$$

unde $[P]$ $(n\times n)$ este soluția ecuației matriciale Riccati

$$[A]^T[P]+[P][A]-[P]\{b\}\{b\}^T[P]\rho^{-2}+[Q]=0 \tag{7.64}$$

Controlul u (ecuația 7.62) constă dintr-un feedback (conexiune inversă) care este o combinație liniară a tuturor variabilelor de stare. Rezultatul este arătat schematic în fig. 7.14 și constituie structura de bază a controlului activ. Sistemul reprezentat prin ecuația (7.59) este un model liniar perturbat de un zgomot Gausian alb. Însă, accelerația seismică nu este un proces aleator cu zgomot alb ; mai curînd, accelerațiile sînt corelate de la un moment la altul. Este posibil, într-o mare măsură să se anticipeze perturbațiile dintr-un viitor apropiat și algoritmul de control optimal utilizează această cunoaștere pentru feedback-ul (conexiunea inversă) variabilelor filtrului seismic. Astfel, un control optim activ este în mod potențial mai bun decît un sistem de izolație care se bazează numai pe un mecanism pasiv (cum ar fi amortizorii) sau chiar un control activ prevăzut cu sisteme elastice și amortizori ideali, dar care ignoră informația privind perturbația ce acționează sistemul dinamic.

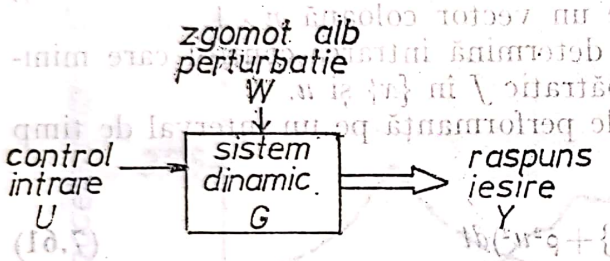


Fig. 7.13

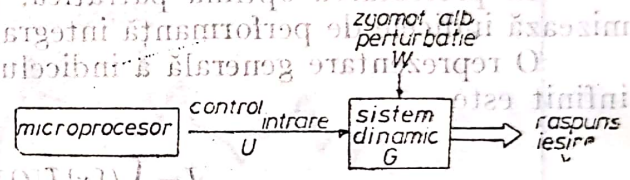


Fig. 7.14

Accelerațiile aleatorii seismice pot fi simulate prin „formarea" unei surse de zgomot alb cu filtru liniar. În literatură se dau parametrii ecuației dinamice de ordinul doi care rezultă într-un seism simulat prin densitatea spectrală de putere (*PSD*) aproximativă, compusă, a mai multor seisme măsurate.

Acest filtru a fost utilizat ca bază pentru generarea pe calculator a seismelor pseudo-aleatoare în studiile ce implică răspunsul seismic al structurilor. Filtrul este folositor în contextul prezentării acestui subcapitol după J.P. Wolf și P.A. Madden, deoarece el reprezintă funcția de transfer într-o intrare pur zgomot alb și o funcție de perturbație corelată ce reprezintă accelerația seismică. Această accelerație acționează asupra sistemului dinamic al structurii, care în exemplul prezentat este un model cu un singur grad de libertate. Se consideră o construcție a unui reactor nuclear reprezentată prin ecuația :

$$m\ddot{x}_t+cx+kx=F \tag{7.65}$$

unde $x=x_t-x_g$ este deplasarea relativă, m este masa generalizată ($41{,}67\times10^6$ kg), k este rigiditatea generalizată ($5{,}92\times10^{10}$ N/m), c este coeficientul de amortizare generalizat ($2{,}2\times10^8$ Ns/m) iar F este forța de control aplicată

$$\ddot{x}+2\omega\xi x+\omega^2x=-\ddot{x}_g+u \tag{7.66}$$

$\omega=37{,}7$ rad/s și $\xi=0{,}07$. Controlul u a fost definit de

$$u=F/m \tag{7.67}$$

Filtrul seismic este reprezentat de

$$\dot{y} = -2\omega_g \xi_g y - \omega_g^2 z - w \tag{7.68}$$

$$\dot{z} = y \tag{7.69}$$

unde

$$\ddot{x}_g = -2\omega_g \xi_g y - \omega_g^2 z \tag{7.70}$$

y și z fiind variabilele filtrului seismic (sensul lor fizic exact nu are importanță aici), ω_g este frecvența filtrului (15,6 rad/s), ξ_g este raportul de amortizare al filtrului (0,6) iar w este intrarea în zgomot alb (cu statistica specificată). Cum rezultă din (7.69), accelerația terenului este o combinație a variabilelor y și z.

În teoria controlului se utilizează conceptul de stare în reprezentarea sistemului dinamic. Ecuația (7.59) este o astfel de reprezentare. Aceasta cere ca toate ecuațiile dinamice să fie reduse la sisteme de ecuații diferențiale de prim ordin. Conform acestui proces, exemplul reactorului modelat ca un sistem cu un singur grad de libertate și filtrul seismic se pot combina și scrie în forma spațiului stărilor:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{b\}u + \{g\}w \quad t \geq 0$$

cu

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\omega\xi & \omega_g^2 & 2\omega_g\xi_g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\omega_g\xi_g \end{bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{7.71}$$

unde vectorul de stare $\{x\}$ este definit de

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ y \end{Bmatrix} \tag{7.72}$$

Acum sînt pregătite toate datele pentru a utiliza rezultatele teoriei controlului optimal la generarea vectorului feedback (de conexiune inversă) (K) din ecuațiile (7.62) și (7.63). Va exista un domeniu al soluțiilor depinzînd de alegerea elementelor matricei de ponderare $[Q]$ și de scalarul ρ. În acest exemplu se dorește minimizarea deplasării x utilizînd o mărime „acceptabilă" a energiei de control pentru producerea acesteia. Această condiție determină matricea de ponderare $[Q]$. Atunci, un set de soluții care sînt parametrice în ρ este generat prin rezolvarea ecuației matriciale Riccati (7.64).

Se pune întrebarea care este soluția corectă. Aceasta este problema de proiectare și răspunsul depinde de compromisul între reducerea dorită a deplasării și cantitatea de energie consumată (care este legată de costul mecanismului de producere a forței de control și de puterea necesară). Rezultatul aplicării feedback-ului (conexiunii inverse) sistemului dinamic este producerea unor noi amortizări și rigidități efective pentru sistemul controlat. Aceasta rezultă matematic substituind componentele de feedback (relația 7.62) în ecuația (7.59).

Rigiditatea și amortizarea efectivă sînt determinate prin primele două elemente (k_1 și k_2) ale vectorului feedback (K) și sînt egale, respectiv, cu $(\omega^2 + k_1)^{1/2}$ și $(2\omega\xi + k_2)/2(\omega^2 + k_1)^{1/2}$. În tabela 7.3 se prezintă mai multe soluții posibile de control optimal care sînt parametrice în ρ. De asemeni sînt date noile rigidități și amortizări efective ale sistemului (se amintește că în exemplul arătat obiectivul de control a fost minimizarea deplasării reactorului și a energiei de control cerute).

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.3

Controlul	Parametrul ρ	Efectiv		Legea de control			
		Frecvența rad/s	Procentul din amortizare ξ	$k_1(s^{-2})$	$k_2(s^{-1})$	$k_3(s^{-1})$	$k_4(s^{-1})$
Bucla deschisă		37,70	0,07	neaplicabil			
1	10^{-2}	37,75	0,08	3,51	0,63	2,54	0,12
2	$0{,}3 \cdot 10^{-2}$	38,16	0,13	34,75	4,59	18,71	0,96
3	10^{-3}	41,69	0,32	316,54	20,43	77,84	4,97
4	$0{,}3 \cdot 10^{-3}$	58,88	0,54	2045,70	58,90	161,66	12,15

Bucla deschisă se referă la o buclă feedback „deschisă" pentru care controlul nu este implementat. O cale de a alege soluția corespunzătoare de control (particular vectorului feedback (K)) este examinarea comportării în sens mediu a sistemului controlat. În exemplul prezentat, vîrfurile deplasărilor (sau accelerațiilor) sînt de cel mai mare interes. Examinarea accelerației sesmice măsurate arată adesea o peroadă de maximă activitate în timpul căreia accelerațiile aleatorii ale terenului sînt staționare.

Răspunsul structurii, controlat sau nu, este în mod staționar în timpul acestei perioade, cu condiția ca staționaritatea perturbației să persiste mai multe secunde. Răspunsul structurii în această perioadă de intensă activitate interesează cel mai mult pe inginerul proiectant. Este relativ ușor de determinat comportarea medie a sistemului liniar considerînd o intrare staționară. Nu este necesară nici o simulare, se cer numai soluțiile sistemului algebric liniar matricial care se obțin cu ușurință. Se consideră din nou ecuația (7.59).

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{b\}u + \{g\}w, \quad t \geq 0$$

În cazul statistic staționar ($[A]$, $\{b\}$, $\{g\}$ sînt constante iar statistica w de asemeni constantă), media pătratică a stării $[X]$, se poate determina din

$$[[A] - \{b\}(K)][X] + [X][[A] - \{b\}(K)]^T = -\{g\}Q(g\}^T \tag{7.73}$$

$$[X] = E[\{x\}\{x\}^T] \quad (E[\cdot] \text{ este operatorul de încredere}) \tag{7.74}$$

iar $Q =$ integrala de corelație a procesului pur aleator w^2. Astfel, pentru un set de soluții ale lui (K) și pentru un Q dat (adică, o intensitate dată a accelerației seismice staționare considerate) există un set de variabile de răspuns $[X]$ reprezentînd răspunsul mediu al sistemului. Similar, controlul mediu este dat de

$$U = E[u^2] = (K)[X](K)^T \tag{7.75}$$

Utilizînd ecuațiile (7.73) și (7.75) este posibil să se stabilească o evaluare cantitativă (într-un sens mediu) a relației între performanța operației de control și energia consumată de control.

În tabelul 7.4 se prezintă răspunsul stării sistemului în forma rădăcinii mediei pătratice pentru cazul buclei deschise și cele patru valori ale controlului arătate în tabelul 7.3.

Tabelul 7.4

Răspunsul sistemului în forma rădăcinii mediei pătratice

Controlul	Accel. teren $\sqrt{\ddot{X}}$ (m/s²)	Deplasare $\sqrt{X}$ (mm)	Viteza $\sqrt{\dot{X}}$ (mm/s)	Forța-control $\sqrt{U}$ (N/kg)
Bucla deschisă	1,35	1,76	56,4	neaplicabil
1	1,35	1,67	52,8	0,038
2	1,35	1,30	38,2	0,226
3	1,35	0,63	16,1	0,713
4	1,35	0,13	3,4	1,200

Rezultatele se obțin din soluțiile ecuației (7.73) în care Q este ales astfel încît valoarea vîrfului accelerației seismice este aproximată la 0,25 g ($\approx$2,5 m/s²). Valoarea lui Q poate fi dedusă deasemeni din rezultatele date de G.W. Housner și P.C. Jennings privind generarea seismelor artificiale, fiind 0,116 m²/s (funcția de autocorelație a unui zgomot alb continuu este dată de $\Phi(\tau)=Q\delta(\tau)$; aceasta este o altă definiție pentru Q). Se observă că valoarea rădăcinii mediei pătratice (1— sigma) a accelerației este de aproximativ 1,35 m/s² în toate situațiile, aceasta rezultînd direct din soluția ecuației (7.73) (folosind 7.70). În general, valorile de vîrf ale răspunsului stării sistemului se vor aproxima prin valorile 2-sigma. Rezultatele se evidențiază mai bine în fig. 7.15, unde rădăcina mediei pătratice a deplasării este exprimată în funcție de rădăcina mediei pătratice a forței de control (pe unitatea de masă). Din punct de vedere al controlului, este util să se opereze în zona de mijloc a curbei. Însă, trebuie să se considere restricțiile adiționale și punctul de funcționare va fi întotdeauna a alegere de compromis între mai mulți parametri ce nu sînt explicit incluși în indicele de performanță J (relația 7.61).

Exemplul 7.5 Controlul activ optim al structurii unui reactor nuclear. Controlul activ este aplicat la vasul de presiune al unui reactor nuclear, fără izolație a bazei, fundat pe rocă (fig. 7.10). Structura este proiectată la acțiunea unei accelerații seismice artificiale cu perioada de 10 sec. în direcție orizontală, normalizată la 0,25 g (linia plină din fig. 7.16). Ea este verificată pentru componenta radială măsurată de 0,23 g (J-145) și pentru componenta măsurată de 0,21 g (E-081) a cutremurului din 1971 de la San-Fernando cu 2% amortizare. Cum rezultă din spectrele de răspuns ale seismelor din fig. 7.16, înregistrările J-145 și E-081 conțin amplitudini semnificative în domeniul frecvențelor joase, respectiv frecvențelor înalte. Deoarece în acest caz interacțiunea sol-structură este neglijată, vasul de presiune se va analiza fără să se considere alte părți ale reactorului.

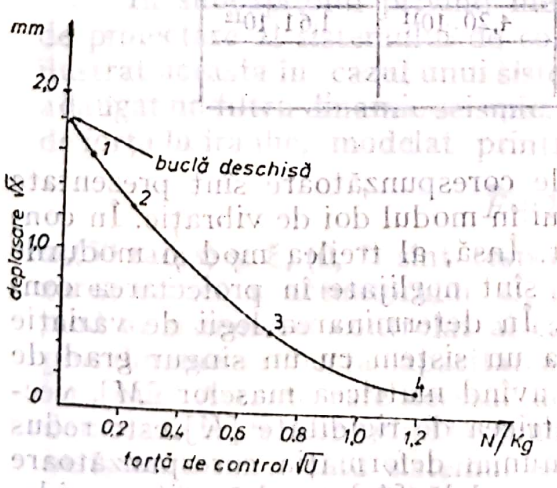


Fig. 7.15

Modelul dinamic al vasului de presiune și al suportului său constă din trei noduri conectate cu grinzi. Proprietățile acestui model care are șase grade de libertate dinamică (fig. 7,17) sînt specificate în tab. 7.5.

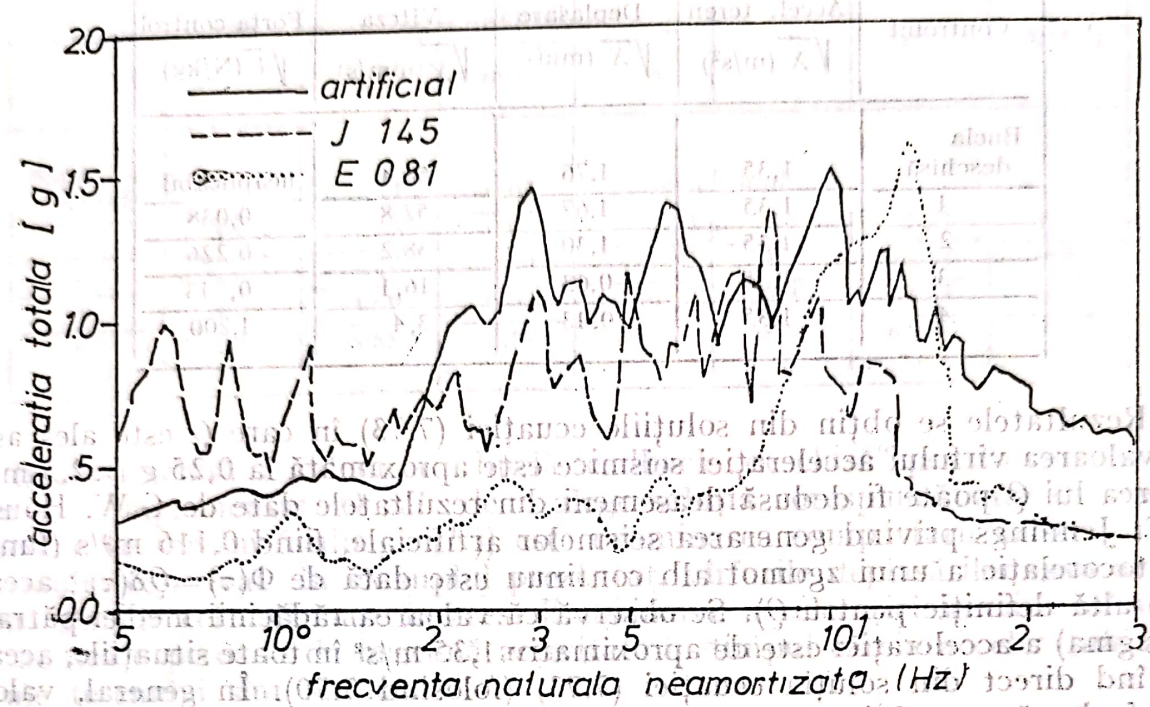


Fig. 7.16

Tabelul 7.5

Nodul Coordonata (m)	Grinda			
	Masa		Rigiditatea	
	Transl. (kg)	Rotație (kg m²)	Forța tăietoare (N)	Moment (Nm²)
21,06	$0{,}38 \cdot 10^6$	$1{,}01 \cdot 10^7$	$1{,}47 \cdot 10^{11}$	$3{,}47 \cdot 10^{12}$
11,63	$0{,}61 \cdot 10^6$	$1{,}61 \cdot 10^7$	$1{,}05 \cdot 10^{11}$	$2{,}63 \cdot 10^{12}$
2,15	$2{,}34 \cdot 10^6$	$2{,}68 \cdot 10^7$	$4{,}20 \cdot 10^{11}$	$1{,}61 \cdot 10^{12}$
−9,25				

Primele trei frecvențe și formele modale corespunzătoare sînt prezentate în fig. 7.16. Forța de control F se aplică nodului în modul doi de vibrație. În consecință modul doi de vibrație nu este excitat. Însă, al treilea mod și modurile superioare care, asemenea celui de al doilea, sînt neglijate în proiectarea controlului real, pot răspunde la acțiunea lui F. În determinarea legii de variație a controlului optim, suportul este modelat ca un sistem cu un singur grad de libertate. Sistemul cu șase grade de libertate avînd matricea maselor $[M]$, vectorul masă al excitației orizontale $\{M\}$ și matricea de rigiditate $[K]$ este redus la un singur grad de libertate, considerînd numai deformația corespunzătoare primei forme modale cu frecvența ω_1. Funcția modală $\{\Phi_1\}$ rezultă prin considerarea unei deplasări unitare în dreptul punctului de aplicație al forței F.

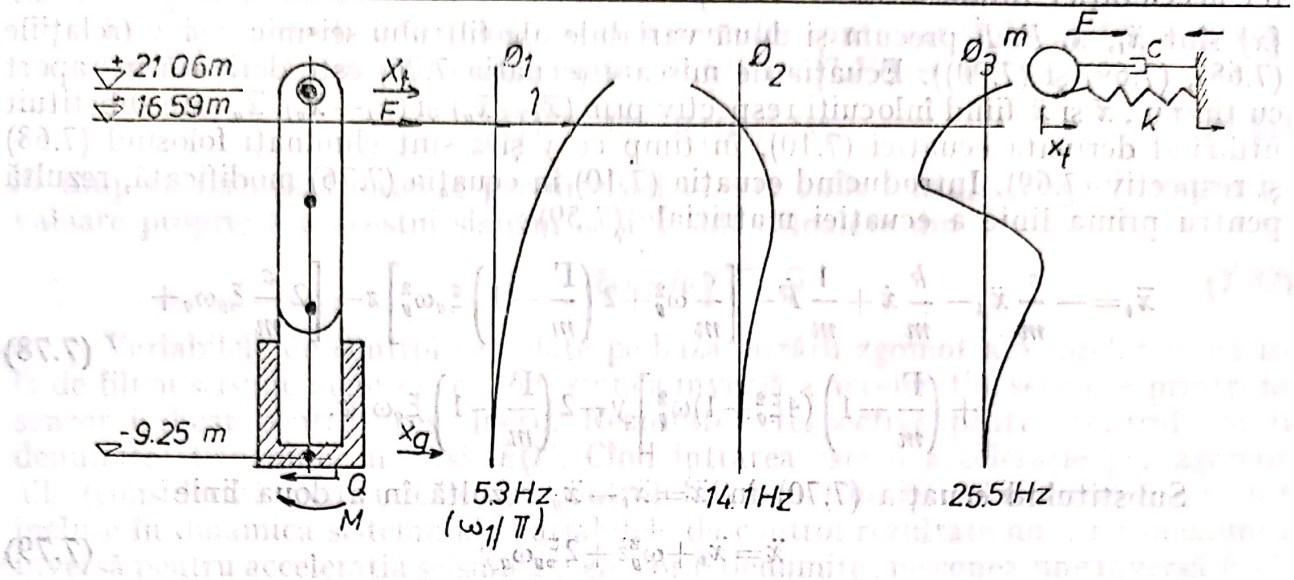


Fig. 7.17

Ecuația de mișcare transformată (modelul din partea dreaptă a fig. 7.16) este

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-\Gamma\ddot{x}_g+F \tag{7.76}$$

unde $x=x_t-x_g$ este deplasarea relativă, $m=\{\Phi_1\}^T[M]\{\Phi_1\}$ este masa generalizată ($1{,}110\times10^6$ kg), $c=2\xi\omega_1 m$ este coeficientul de amortizare generalizat ($1{,}493\times\times10^6$ Ns/m pentru $\xi=0{,}02$), $k=\omega_1^2 m$ este rigiditatea generalizată ($1{,}255\times10^9$ N/m și $\Gamma=\{\Phi_1\}^T\{M\}$ este factorul de participare ($1{,}264\times10^9$ kg). Legea de control optim conține variabilele de stare ale modelului structurii reduse. Amplitudinile primei forme modale a modelului real se pot calcula pe baza măsurătorilor deplasărilor generalizate și eliminarea contribuției modurilor superioare.

Deoarece rezultatele simulării diferă mult de cele ce folosesc direct deplasările ce apar în toate modurile, în locul unde forța de control este aplicată ca amplitudine a primului mod, se utilizează o schemă simplă ce implică un senzor plasat numai într-un singur loc.

a) Proiectarea sistemului de control

În subcapitolul privind metodologia de control activ s-a studiat procesul de proiectare al sistemului de control utilizînd tehnica de control optimal și s-a ilustrat aceasta în cazul unui sistem dinamic cu un singur grad de libertate avînd adăugat un filtru dinamic seismic. Aici se va include în plus dinamica unui actuator de forță hidraulic, modelat printr-o ecuație diferențială de ordinul doi :

$$\dddot{F}+2\xi_s\omega_s\ddot{F}+\omega_s^2\dot{F}=m\omega_s^2\dot{u}, \tag{7.77}$$

ω_s(50 rad/s) și ξ_s (0, 7) sînt respectiv, frecvența circulară și procentul din amortizarea critică a actuatorului. ω_s este ales mult mai mare decît frecvența acelui mod al sistemului controlat al cărui răspuns trebuie modificat cel mai mult. În plus dinamica reflectă capacitatea de lucru în lărgime de bandă finită a actuatoarelor reale. Aceasta este necesar deoarece proiectarea controlului bazată pe considerarea actuatorilor avînd lărgime de bandă infinită poate conduce la o funcționare instabilă atunci cînd sistemul este implementat cu actuatori reali, în practică.

Obiectivele de proiectare ale controlului în exemplul considerat sînt creșterea amortizării sistemului (avînd o rigiditate efectivă constantă) și reducerea răspunsu-

lui accelerației totale a vasului de presiune. Variabilele de stare ale sistemului $\{x\}$ sînt $\ddot{x}_t$, $\dot{x}$, F, $\dot{F}$ precum și două variabile ale filtrului seismic z și y (relațiile (7.68), (7.69) și (7.70)). Ecuația de mișcare (ecuația 7.76) este derivată în raport cu timpul, $\overline{\dot{x}}$ și $\ddot{x}$ fiind înlocuiți respectiv prin $(\overline{\dot{x}}_t - \overline{\dot{x}}_g)$ și $(\ddot{x}_t - \ddot{x}_g)$. $\overline{\dot{x}}_g$ este substituit utilizînd derivata ecuației (7.10), în timp ce y și z sînt eliminați folosind (7.68) și respectiv (7.69). Introducînd ecuația (7.10) în ecuația (7.76) modificată, rezultă pentru prima linie a ecuației matriciale (7.59):

$$\overline{\dot{x}}_t = -\frac{c}{m}\ddot{x}_t - \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}\dot{F} - \left[\frac{c}{m}\omega_g^2 + 2\left(\frac{\Gamma}{m} - 1\right)\xi_g\omega_g^3\right]z - \left[2\frac{c}{m}\xi_g\omega_g + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\Gamma}{m} - 1\right)(4\xi_g^2 - 1)\omega_g^2\right]y - 2\left(\frac{\Gamma}{m} - 1\right)\xi_g\omega_g w. \tag{7.78}$$

Substituind ecuația (7.70) în $\ddot{x} = \ddot{x}_t - \ddot{x}_g$ rezultă în a doua linie

$$\ddot{x} = \ddot{x}_t + \omega_g^2 z + 2\xi_g\omega_g y \tag{7.79}$$

Ecuația diferențială de ordinul doi a actuatorului este redusă la două ecuații diferențiale de ordinul întîi cuplate prin introducerea noii ecuații

$$\dot{S} = F \tag{7.80}$$

și introducerea lui S în locul lui F în ecuația (7.77). Ecuațiile (7.77), (7.78), (7.79) și (7.80) împreună cu cele două ecuații ale filtrului seismic (7.68) și (7.69) determină matricea $[A]$ și vectorii $\{b\}$, $\{g\}$ ai ecuației (7.59). Întregul sistem are ordinul $n=6$.

Două soluții de bază sînt utilizate în obținerea controlului. O soluție de bază implică ecuațiile filtrului seismic (7.68) și 7.69), situație descrisă mai sus, iar cealaltă nu le implică. În ultimul caz, forța seismică de intrare este o perturbație zgomot alb pur. Sistemul (ecuația (7.59)) este redus la ordinul $n=4$.

Caracteristicile sistemului și ale mecanismului de control sînt prezentate în tabelul 7.6.

Tabelul 7.6

Mecanismul cu conexiune inversă optimal și caracteristicile sistemului asociat (vasul de presiune)

Controlul	Efectiv		Legea de control					
	Frecvența ω(rad./s)	Amortizarea ξ	k_1	$k_2(s^{-1})$	k_3 (kg^{-1})	k_4 (skg^{-1})	$k_5(s^{-1})$	$k_6(s^{-2})$
Bucla deschisă	34,08	0,02	neaplicabil					
Zgomot alb (filtru exclus)								
1	34,04	0,05	0,06	1,05	0	0	neaplicabil	
2	33,60	0,15	0,25	3,93	0	0		
3	31,40	0,31	0,62	8,17	0	0		
4	29,01	0,40	0,90	10,78	0	0		
Zgomot corelat (filtru inclus)								
1	34,04	0,05	0,06	1,05	0	0	16,64	1,38
2	33,60	0,15	0,25	3,93	0	0	65,06	5,65
3	31,40	0,31	0,62	8,17	0	0	143,05	13,35
4	29,01	0,40	0,90	10,78	0	0	193,67	18,92

Legea de control este dată de ecuația (7.62) ținînd cont de (7.67). Variabilele actuatorului k_3 și k_4 sînt în toate cazurile zero. Introducerea filtrului seismic nu modifică pe k_1 și k_2.

Frecvența efectivă și amortizarea sistemului controlat (tabelul 7.7) se stabilesc cum urmează : substituind ecuația (7.62) în (7.59) se obține :

$$\{\dot{x}\}=([A]-\{b\}(K))\ \{x\}, \tag{7.81}$$

în timp ce termenul datorat perturbației w este omis (cazul omogen). Pentru o valoare proprie λ a acestui sistem, ω și ξ sînt calculate din

$$\lambda=-\xi\omega+i\omega\sqrt{1-\xi^2} \tag{7.82}$$

Variabilele de control calculate pe baza intrării zgomot alb corelat (ecuațiile de filtru seismic incluse) cer conexiunea inversă a accelerației seismice printr-un senzor indicat pentru acest lucru. Rezultatele respective pentru control vor fi denumite „Conexiune inversă *EQ*". Cînd intrarea este o accelerație pur zgomot alb (considerată pentru calculul controlului) ecuațiile filtrului seismic nu sînt incluse în dinamica sistemului. Variabilele de control rezultate nu cer conexiunea inversă pentru accelerația seismică și ele vor fi denumite „ne conexiune inversă *EQ*". Performanța medie a diverselor variabile de control este prezentată în tabelul 7.7 care însumează rezultatele covarianței sistemului (răspunsul rădăcinii mediei pătratice) atunci cînd este acționat de o accelerație seismică aleatorie staționară avînd valoarea vîrfului de aproximativ 0,25 g (ecuația (7.73)).

Tabela 7.7

Răspunsul rădăcinii mediei pătratice pentru modelul redus.

Controlul	Accelerația terenului $\sqrt{\ddot{X}_h}$ (m/s²)	Accelerația totală $\sqrt{\ddot{X}_t}$ (m/s)	Viteza $\sqrt{\dot{X}}$ (m/s)	Forța de control $\sqrt{U}$ (N/kg)
Bucla deschisă	1,37	5,11	0,145	neaplicabil
Zgomot alb (filtru exclus)				
1	1,37	3,41	0,092	0,19
2	1,37	2,36	0,060	0,56
3	1,37	1,98	0,051	1,12
4	1,37	1,89	0,051	1,51
Zgomot corelat (filtru inclus)				
1	1,37	3,32	0,089	0,18
2	1,37	2,21	0,051	0,43
3	1,37	1,78	0,035	0,68
4	1,37	1,66	0,030	0,82

Aceleași rezultate sînt reprezentate în fig. 7.18. Controlul bazat pe zgomotul corelat (ecuațiile filtrului seismic incluse) conduce la o performanță mai bună decît controlul bazat pe zgomotul alb.

Controlul nr. 2 apare ca fiind cea mai rezonabilă alegere deoarece prezintă un compromis între reducerea accelerației și mărimea energiei de control consumate.

Se studiază în cele ce urmează răspunsul modelului redus al structurii la o excitație armonică a solului $x_g(\bar{\omega})$. Cum rezultă din fig. 7.19, unde accelerația totală

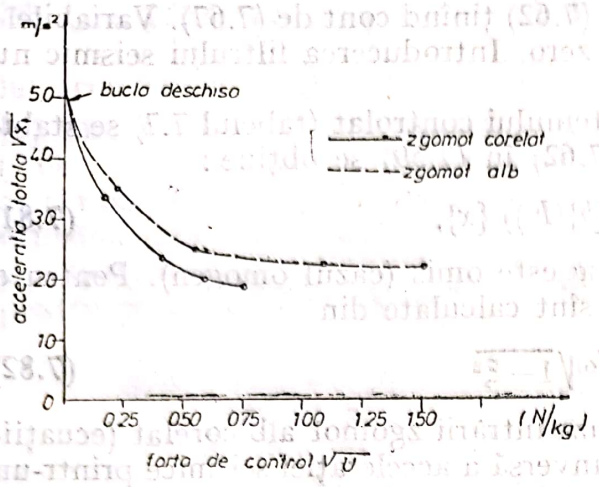


Fig. 7.18

x_t a masei punctuale este reprezentată în funcţie de $\bar{\omega}$, introducerea controlului activ (cazul 2, „conexiunea inversă *EQ''*) reduce semnificativ răspunsul în domeniul frecvenţei fundamentale. Curba corespunzătoare „ne conexiune inversă *EQ''* coincide din punct de vedere practic cu cea din fig. 7.18. Însă, aceasta nu este cazul cînd este studiată forţa de control F, ca în fig. 7.20.

Este interesantă comparaţia cu cazul unui amortizor vîscos la care forţa de control depinde numai de x. Punînd $k_1=0$, amortizarea efectivă a unui sistem cu un singur grad de libertate fără nici un actuator ξ^* este următoarea

$$\xi^*=\xi+\frac{k_2}{2\omega} \qquad (7.83)$$

ω şi ξ se referă la valorile corespunzătoare pentru bucla deschisă.

Alegînd valorile pentru ξ^* similare cu cele din tabelul 7.7 (0,05 ; 0,15 ; 0,31 ; 0,40) se calculează următoarele valori ale lui k_2 pentru cazurile de la 1 la 4 : 2, 04 ; 11,55 ; 20,93 ; 27,42 s^{-1}. Această soluţie de proiectare pentru control se va denumi „viteză numai conexiune inversă". În această soluţionare este important de încorporat dinamica actuatorului (ecuaţia (7.77)). Procentul din amortizarea critică efectiv pentru sistemul combinat (relaţia 7.82) va fi însă mic.

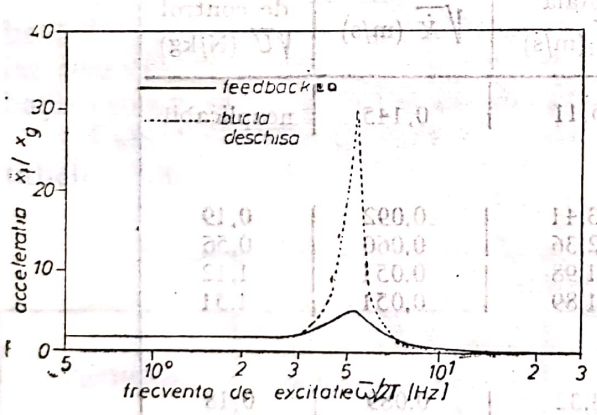


Fig. 7.19

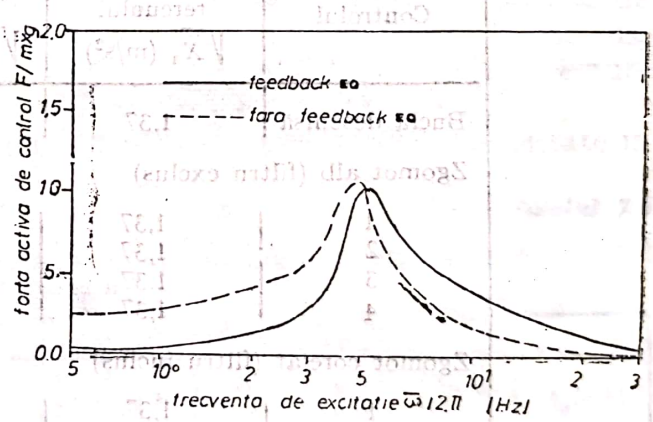


Fig. 7.20

Pentru cazurile de la 1 la 4 el va fi 0,03 ; 0,07 ; 0,06 ; 0,04. Aceste valori vor conduce însă numai la o mică reducere a răspunsului.

b) Evaluarea controlului act v în modelul dinamic real (simulare)

Răspunsul maxim al vasului de presiune cauzat de seismul artificial este sumarizat pentru toate soluţiile de control activ în tabelul 7.8. Proiectarea „conexiune inversă *EQ''* conduce la o reducere semnificativă în comparaţie cu structura convenţională (bucla deschisă) şi are performanţe mai bune decît cazul „ne conexiune inversă *EQ''*. Aceasta apare de asemeni în fig. 7.21 şi 7.22 unde acceleraţia

maximă totală în extremitatea superioară a vasului de presiune $\ddot{x}_t$ este reprezentată în funcție de forța de control (maximă) F și respectiv puterea maximă cerută, în cazul seismului artificial.

Răspunsul maxim (seismul artificial) *Tabelul 7.8*

Controlul	Accelerația totală la extremitatea superioară $\ddot{x}_t$ (m/s)	Deplasarea la extremitatea superioară x (mm)	Forța tăietoare la baza T (MN)	Momentul de răsturnare M (MNm)	Forța de control F(MN)	Puterea (MW)
Bucla deschisă	14,6	13,4	18,7	377	neaplicabil	
Viteza numai conexiune inversă						
1	12,8	11,4	16,9	334	0,58	0,12
2	9,8	6,6	11,3	197	1,73	0,21
3	10,8	6,2	12,0	189	3,29	0,41
4	10,7	6,4	12,3	208	4,31	0,52
Ne conexiune inversă *EQ*						
1	11,6	11,0	15,7	314	0,61	0,14
2	8,6	8,8	12,4	247	1,89	0,30
3	6,4	7,9	14,0	219	3,30	0,39
4	5,5	8,3	14,7	251	4,15	0,43
Conexiune inversă *EQ*						
1	11,2	10,5	15,4	304	0,52	0,11
2	7,7	7,3	11,7	213	1,36	0,19
3	5,2	5,0	12,2	161	2,14	0,22
4	4,6	4,4	12,4	164	2,65	0,21

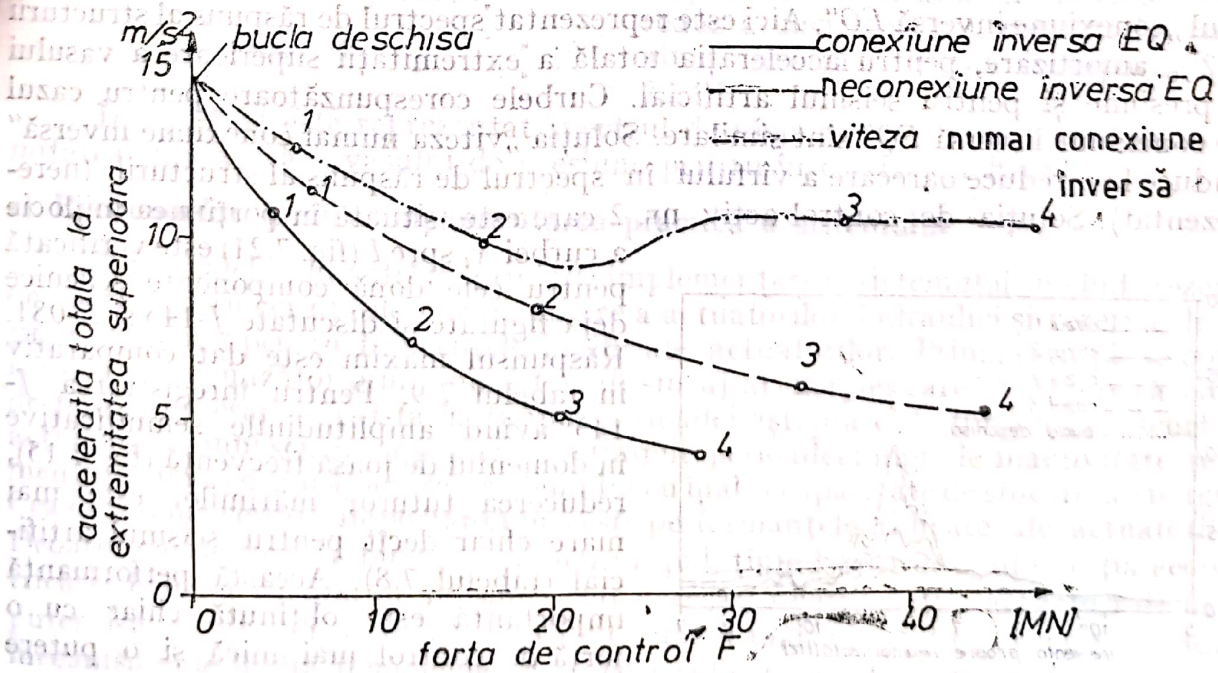


Fig. 7.21

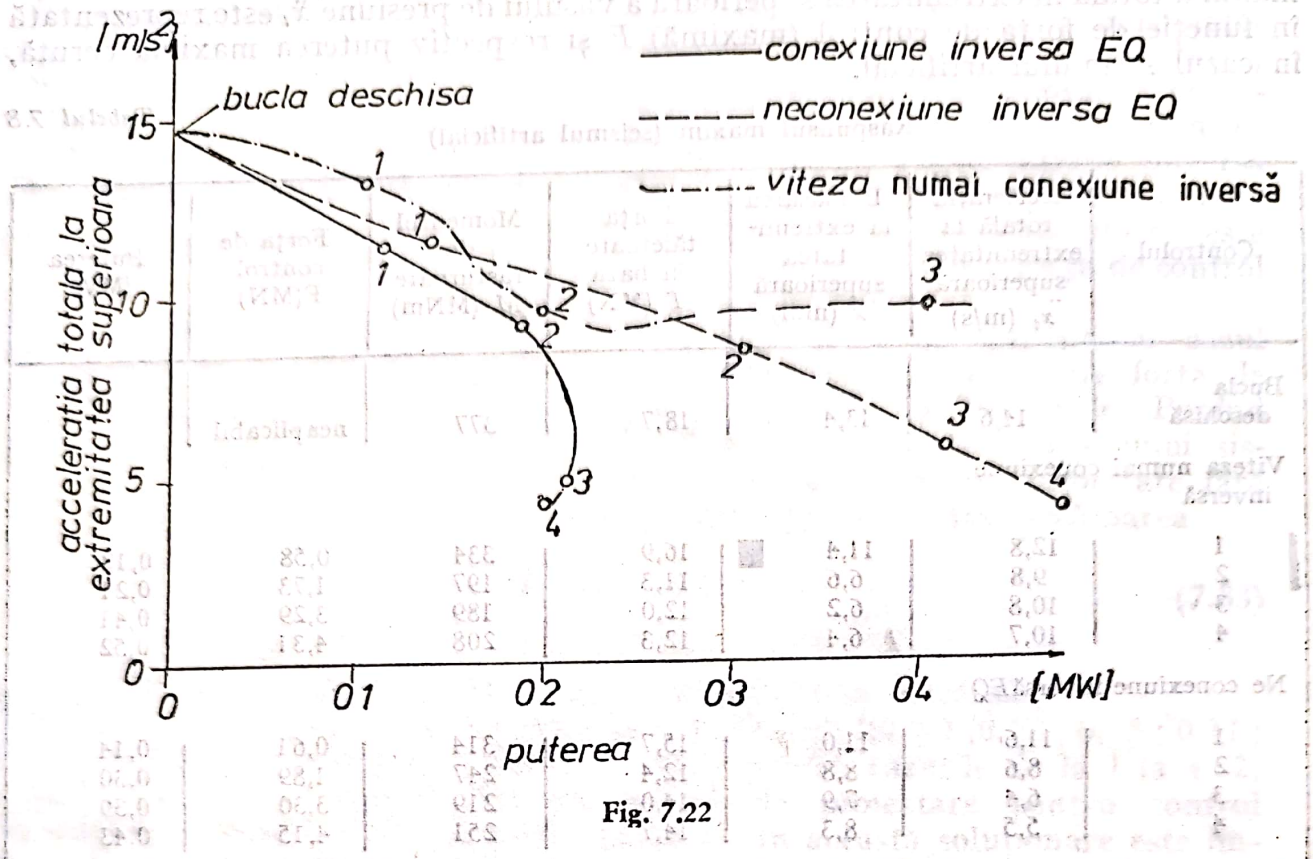


Fig. 7.22

Puterea cerută (0,2 MW) pentru reducerea răspunsului cu aproximativ 2/3 este modestă. Soluția „viteza numai conexiune inversă" are performanțe slabe, în special pentru valori mari ale lui F, cînd amortizarea efectivă a sistemului dinamic cu actuator descrește. Vîrful pe care-l prezintă frecvența fundamentală în spectrul de răspuns al structurii în cazul „bucla deschisă" este redus semnificativ atunci cînd este introdus controlul activ. Aceasta este vizibil în fig. 7.23 pentru cazul „conexiune inversă *EQ*". Aici este reprezentat spectrul de răspuns al structurii cu 2% amortizare, pentru accelerația totală a extremității superioare a vasului de presiune și pentru seismul artificial. Curbele corespunzătoare pentru cazul „ne conexiune inversă *EQ*" sînt similare. Soluția „viteza numai conexiune inversă" conduce la o reduce oarecare a vîrfului în spectrul de răspuns al structurii (nereprezentat). Soluția de control activ nr. 2 care este situată în porțiunea mijlocie a curbei x_t spre F (fig. 7.21) este verificată pentru cele două componente seismice deja figurate și discutate *J*-145 și *E*-081. Răspunsul maxim este dat comparativ în tabelul 7.9. Pentru înregistrarea *J*-145 avînd amplitudinile semnificative în domeniul de joasă frecvență (fig. 7.15), reducerea tuturor mărimilor este mai mare chiar decît pentru seismul artificial (tabelul 7.8). Această performanță importantă este obținută chiar cu o forță de control mai mică și o putere mai mică.

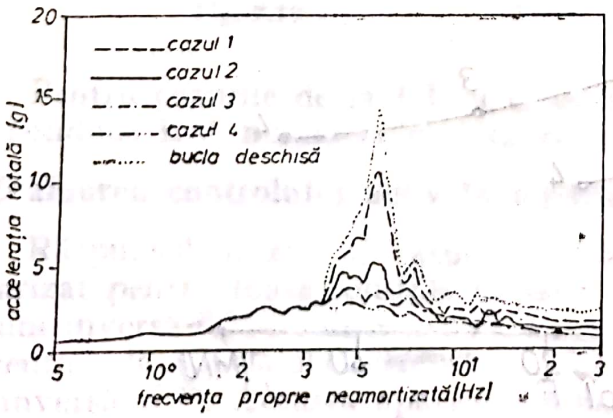


Fig. 7.23

Tabelul 7.9

Răspunsul maxim (înregistrările J-145 și E-081)

Controlul	Accelerația totală la extremitatea superioară $\ddot{x}_t$ (m/s²)	Deplasarea la extremitatea superioară x (mm)	Forța tăietoare la baza T (MN)	Momentul de răsturnare M (MNn)	Forța de control F (MN)	Putere (MW)
J-145						
Bucla deschisă	16,0	14,8	19,9	415	neaplicabil	
Ne conexiune inversă *EQ* 2	6,3	6,6	11,9	214	1,34	0,18
Conexiune inversă *EQ* 2	5,9	5,5	10,9	188	1,12	0,13
E-081						
Bucla deschisă	6,3	4,7	6,7	127	neaplicabil	
Ne conexiune inversă *EQ* 2	5,6	3,9	5,3	68	0,79	0,08
Conexiune inversă *EQ* 2	5,5	3,6	5,9	65	1,03	0,10

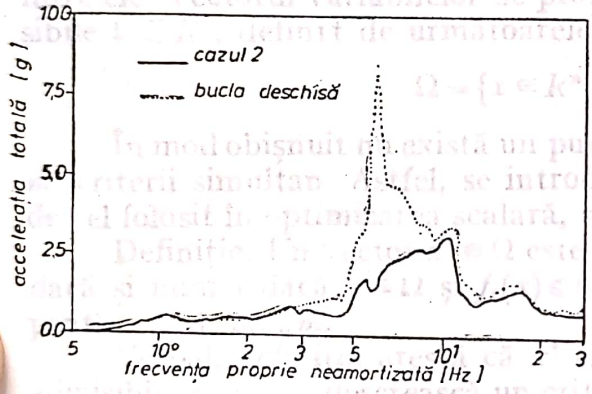


Fig. 7.24

Înregistrarea de înaltă frecvență *E*-081 este mai puțin diminuată cînd se introduce controlul activ. Aceasta este de așteptat din fig. 7.18 deoarece amplitudinile acestei înregistrări (fig. 7.15) la frecvența fundamentală a structurii sînt mici. Dar chiar dacă răspunsul în „buclă deschisă" este mic, structura se va comporta satisfăcător chiar acționată de acest spectru. Vîrful spectrului răspuns în cazul „buclei deschise" este redus atunci cînd controlul activ (conexiune inversă *EQ*) este încorporat (fig. 7.24).

În fig. 7.24 este reprezentat spectrul de răspuns (2% amortizare) în extremitatea superioară a vasului de presiune pentru înregistrarea E-081.

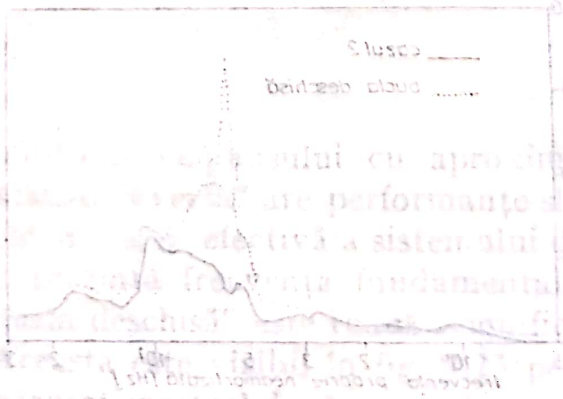
c) Recomandări pentru implementarea practică a sistemului

Principalele dificultăți privind implementarea sistemului includ rezerva necesară pentru cerința de vîrf de putere a actuatorilor hidraulici și rezerva de lățime de bandă pentru frecvențele înalte ale actuatorilor. Prima cerință se poate rezolva corespunzător printr-un sistem de stocaj al energiei care să asigure că vîrful de putere necesar va exista în timpul perioadei așteptate de timp foarte scurt de acționare a unui seism important. În timpul perioadei lungi de inactivitate se va menține numai o mică putere a sistemului cu înaltă capacitate de stocare a energiei. Cea de a doua cerință importantă privește performanțele ridicate ale actuatorilor. Deoarece actuatorii trebuie să acționeze rapid, ținînd cont de configurația geometrică și fizică a vasului de presiune sînt necesari relativ puțini actuatori de forță puternică, și nu mai mulți actuatori cu o forță mai mică. Prin urmare se indică mecanisme de înaltă tehnologie (și de cost ridicat) și este necesar studiul relației cost/beneficiu pentru justificarea implementării lor. Studiul trebuie să includă considerarea performanței relative și costul variantei de soluție ce constă dintr-un

sistem de izolare ce implică actuatori de forță semiactivă. Metoda controlului optimal adoptată în acest subcapitol se poate utiliza pentru astfel de sisteme.

Se cere însă o completare a sistemului de control activ al vibrațiilor care să includă și gradele de libertate ale fundației reactorului în cazul unui sol deformabil. Trebuie să se considere orientarea fizică reală a actuatorilor și senzorilor, deoarece componenta orizontală a seismului va avea inițial o direcție de acțiune necunoscută.

Actuatorii semi-activi sînt mai puțin costisitori, dar și performanța lor potențială este mai scăzută. Studiul cost/beneficiu trebuie să cuprindă această variantă interesantă a controlului vibrațiilor. Avantajul cel mai important al unui actuator semi-activ, asemănător celui mai comun amortizor, este că nu cere puterea exterioară de la intrare. Însă, spre deosebire de amortizor, el utilizează o modulare inteligentă a curgerii interne hidraulice, ceea ce constituie un element activ al mecanismului. Teoria controlului optimal este un instrument ideal de utilizat pentru obținerea relației între performanță, controlul vibrațiilor și parametrii actuatorului. Astfel mecanismul activ compensează accelerația seismică pe baza măsurătorilor senzorilor ce sînt incluse prin conexiunea inversă pentru cea mai bună performanță.



E. OPTIMIZAREA MULTICRITERIALĂ ÎN PROIECTAREA STUCTURILOR

CAPITOLUL 8

În problemele de optimizare complexe inginerul este pus adesea în situația să considere mai multe criterii care sînt conflictuale. În mecanica structurilor acestea pot fi foarte diverse : deplasări, eforturi unitare, valori proprii, conformare, criterii energetice sau economice. Astfel se definește o problemă de optimizare multicriterială, unde se studiază o funcție obiectiv vectorială :

$$\min_{x\in\Omega} f(x)=[f_1(x),f_2(x),...,f_m(x)]^T \tag{8.1}$$

unde componentele $f_i(x)$, $i=1, 2,..., m$ sînt numite criterii și sînt independente între ele. Vectorul variabilelor de proiectare x aparține domeniului mulțimii admisibile $\Omega\subset R^n$, definit de următoarele restricții egalitate și inegalitate

$$\Omega=\{x\in R^n \mid h(x)=0,\ g(x)\leqslant 0\} \tag{8.2}$$

În mod obișnuit nu există un punct unic care să dea un optim pentru toate cele m criterii simultan. Astfel, se introduce un nou concept de optimalitate diferit de cel folosit în optimizarea scalară, soluție a problemei de optimizare vectorială.

Definiție. Un vector $x^*\in\Omega$ este numit Pareto optimal pentru problema (8.1) dacă și numai dacă $x\in\Omega$ și $f_i(x)\leqslant f_i(x^*)$ pentru $i=1, 2,...,m$ implică $f_i(x)=f_i(x^*)$ pentru $i=1, 2,...,m$.

Verbal, definiția atestă că x^* este Pareto optimal dacă nu există un vector admisibil x care să descrească un criteriu fără să nu cauzeze o creștere simultană a altui criteriu. Notația $z^*=f(x^*)$ este utilizată pentru vectorul corespunzător din spațiul criterilor R^m și este denumită soluție minimală. În mod obișnuit există mai multe optime Pareto pentru problema de optimizare vectorială și este necesară o informație adițională pentru determinarea mulțimii optime Pareto. Aceasta face posibilă introducerea de considerații speciale ne incluse în problema de optimizare, impuse de proiectant. Astfel, optimizarea multicriterială este o tehnică flexibilă pentru cele mai multe probleme de proiectare.

8.1 Metode numerice pentru optimizarea multicriterială

În literatură sînt prezentate mai multe metode numerice pentru rezolvarea problemei generale vectoriale neliniare de optimizare. În mod obișnuit ele schimbă problema inițială într-un șir de probleme de optimizare scalare care pot fi rezolvate utilizînd tehnicile de programare neliniară standard.

a) Metoda mediei ponderate

Una dintre cele mai obișnuite metode de rezolvare ale problemelor cu mai multe criterii este formarea unei funcții obiectiv sub forma unei medii ponderate

a criterilor. În cazurile cînd sînt puse anumite condiții de convexitate, această tehnică se poate utiliza în generarea optimului Pareto pentru problemele multicriteriale. Dacă se introduce notația $b \in R^m$ pentru vectorul coeficienților de ponderare problema ia forma

$$\min_{x \in \Omega} \{b\}^T f(x) \tag{8.3}$$

Fără a pierde generalitatea $\{b\}$ se poate normaliza astfel încît suma componentelor lui, care sînt nenegative și nu toate zero, este egală cu unitatea.

Acum, soluțiile optime Pareto pot fi generate parametric prin varierea ponderilor b_i în funcția obiectiv. Principalul dezavantaj al acestei tehnici este incapacitatea producerii întregii mulțimi optimale Pareto pentru unele probleme neconvexe. Aceasta se poate vedea geometric prin reprezentarea metodei de mediere în spațiul criterilor, unde problema se poate formula

$$\min_{z \in f(\Omega)} \{b\}^T z \tag{8.4}$$

Pentru un $\{b\}$ fixat se minimizează o funcție liniară în $f(\Omega)$, care este imaginea domeniului admisibil. Cum este ilustrat în fig. 8.1, chiar marea majoritate a optimelor Pareto nu pot fi obținute prin aceasta metodă dacă conturul inferior a lui $(f\Omega)$ nu este convex.

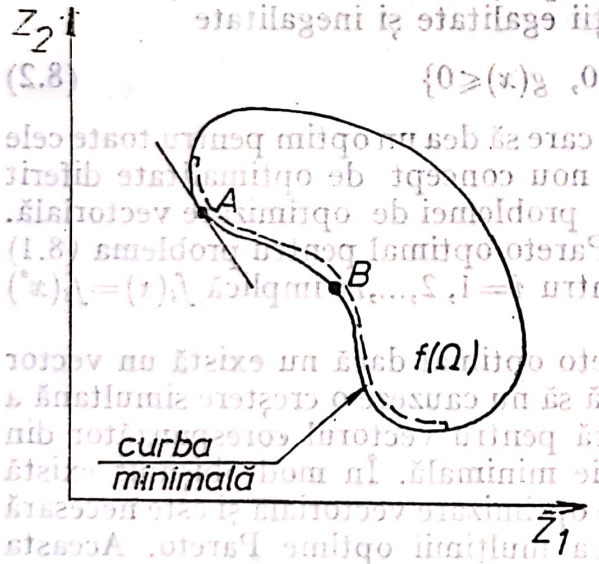


Fig. 8.1 Interpretarea geometrică a metodei mediei ponderate în cazul bicriterial. Punctul de minim B și optimul Pareto corespunzător nu evidențiază ce ponderi sînt utilizate.

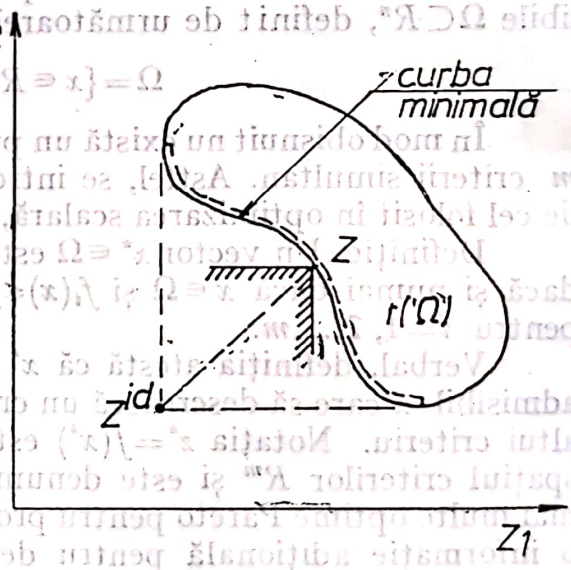


Fig. 8.2 Interpretarea geometrică a metodei minimax în cazul bicriterial. Toate optimele Pareto sînt obținute în această metodă, convexitatea curbei minimale interesînd mai puțin.

b) Metoda restricției

Metoda restricției este o altă metodă pentru generarea soluțiilor optimale Pareto. În această tehnică, formula (8.1) este înlocuită prin

$$\min_{x \in \Omega \cap \Omega_k(\varepsilon)} f_k(x) \tag{8.5}$$

unde

$$\Omega_k(\varepsilon) = \{x \mid f_i(x) \leqslant \varepsilon_i, \quad i \neq k\}$$

și

$$\varepsilon \in E_k = \{[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n]^T \; \Omega_n(\varepsilon) \neq \Phi\}$$

Verbal, aceasta înseamnă că un criteriu este ales ca funcție obiectiv scalară iar celelalte criterii sînt considerate sub formă de restricții inegalități, ε_i fiind considerate convenabil alese. Prin variația sistematică a acestor parametri se pot obține toate soluțiile optime Pareto și în cazurile de neconvexitate. Metoda restricției are la bază tehnica numerică și este tratată pe larg în literatură.

8.1.1. Metoda minimax

Metoda minimax se bazează pe norma l_∞ sau cu alte cuvinte pe funcția distanță indusă de ea. Aici se minimizează cea mai mare deplasare de la așa numita soluție ideală. Prin introducerea anumitor parametri se poate construi un procedeu pentru generarea soluțiilor optimale Pareto. Mai întîi soluția ideală necesară în această metoda are formă

$$z^{id} = \{\min_{x \in \Omega} f_1(x), \min_{x \in \Omega} f_2(x), \ldots, \min_{x \in \Omega} f_m(x)\}^T. \tag{8.6}$$

În scopul determinării acestui punct în spațiul criteriilor este necesar să se caute minimul fiecărei funcții f_i în Ω, deci rezolvarea a m probleme scalare de optimizare. În general, acest ideal este irealizabil $z^{id} \in f(\Omega)$. Distanța între $z^{id} \in f(\Omega))$ și soluția ideală $z^{id} \in R^m$ este măsurată prin funcția metrică

$$d_\infty(z, z^{id}) = \max_{i=1,2,\ldots,m} | z_i - z_i^{id} |, \tag{8.7}$$

Deoarece se dorește o soluție invariantă de scară a problemei, funcția obiectiv vectorială se normalizează

$$\bar{f}(x) = \{\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x), \ldots, \bar{f}_m(x)\}^T, \tag{8.8}$$

componentele fiind definite de

$$\bar{f}_i(x) = \frac{f_i(x) - \min f_i(x)}{\max f_i(x) - \min f_i(x)} \tag{8.9}$$

Astfel, valorile fiecărui criteriu normalizat sînt limitate la un interval egal, $\bar{f}_i(x) \in [0, 1]$. Dacă se folosește notația $\bar{z} = \bar{f}(x)$, problema este acum privită pentru vectorul $\bar{z} \in f(\Omega)$ care în sensul metricii d_∞ este cel mai apropiat de soluția ideală $\bar{z}^{id} = 0$, și se poate formula

$$\min_{\bar{z} \in \bar{f}(\Omega)} d_\infty(\bar{z}, 0) \tag{8.10}$$

Un punct optim Pareto se obține obișnuit ca soluție a acestei probleme scalare de optimizare modificată în scopul rezolvării problemei multicriteriale (8.1). Dacă se utilizează parametrii b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ ca ponderi pentru criteriu în același mod ca în metoda mediei ponderate, problema se poate scrie

$$\min_{x \in \Omega} \max_i (b_i \bar{f}_i(x)) \tag{8.11}$$

Acum, toată mulțimea soluțiilor optime Pareto se poate genera parametric prin variația ponderilor în funcția de obiectiv. Metoda este ilustrată în fig. 8.2 care arată că tehnica minimax poate fi interpretată ca o căutare a punctului $\bar{z}^* \in$

$\in \overline{f}(\Omega)$ în care unghiul drept atinge $\overline{f}(\Omega)$. Vectorul corespunzător $x^* \in \Omega$ este optimul Pareto real necesar proiectului. Sensul geometric al variației ponderilor este schimbarea unghiului drept care se imaginează în mișcare pe o sferă generată de metrica d_∞ în spațiul criteriilor. De aici este evident că utilizarea metodei minimax dată în (8.11) conduce la obținerea tuturor optimelor Pareto, convexitatea curbei minimale interesînd mai puțin.

8.1.2. Metoda minimax în varianta lui A. Osyczka

Se rezolvă problemele de optimizare separat pentru fiecare criteriu. Se presupune că extremele pot fi determinate și fie $x^{0(i)}=\{x_1^{0(i)},\ldots, x_n^{0(i)}\}^T$ vectorul variabilelor care minimizează funcția obiectiv $f_i(x)$. Cu alte cuvinte vectorul $x^{0(i)} \in X$ este astfel încît

$$f_i(x^{0(i)}) = \min_{x \in X} f_i(x) \tag{8.12}$$

Considerînd că pentru fiecare $x \in X$, $f_i(x) \neq 0$, devierea fracționară de la extrem pentru cea de-a i-a funcție obiectiv poate fi calculată cu formula:

$$z_i'(x) = \frac{\operatorname{abs}(f_i(x) - f_i(x^{0(i)}))}{\operatorname{abs}|f_i(x^{0(i)}))} \tag{8.13}$$

sau cu formula

$$z_i''(x) = \frac{\operatorname{abs}(f_i(x) - f_i(x^{0(i)}))}{\operatorname{abs}(f_i(x))} \tag{8.14}$$

Se menționează că aplicînd relația $\max f_i(x) = -\min(-f_i(x))$ toate funcțiile sînt minimizate. Însă, pentru problema formulată inițial, devierile fracționare de la extrem au diferite interpretări fizice pentru funcțiile care sînt minimizate și pentru cele care sînt maximizate. Formula (8.13) pentru funcțiile care sînt minimizate definește incrementul fracționar în timp ce pentru cele care sînt maximizate definește decrementul fracționar. Formula (8.14) este similară.

Pentru orice $x \neq x^{0(i)}$ valorile lui $z_i'(x)$ și $z_i''(x)$ pentru funcția i vor fi diferite. Cea mai bună soluție de compromis va fi dată de cele mai mici valori ale devierilor fracționare (incremente și decremente fracționare) pentru toate funcțiile obiectiv.

Fie $z(x)=\{z_1(x),\ldots, z_k(x)\}^T$ vectorul devierilor fracționare definit în E^k. Componenta i a vectorului $z(x)$ se va evalua cum urmează:

$$z_i(x) = \max\{z_i'(x), z_i''(x)\} \tag{8.15}$$

Formula (8.15) alege maximul dintre cele două valori $z_i'(x)$ și $z_i''(x)$. Folosind principiul minimax de optimalitate cea mai bună soluția de compromis se poate defini astfel:

Punctul $x^* \in X$ este optim în sensul minimax dacă pentru fiecare $x \in X$ următoarea formulă de recurență este satisfăcută

pasul 1 $$v_1(x^*) = \min_{x \in X} \max_{i \in I} \{z_i(x)\}$$

și atunci $I_1 = \{i_1\}$, unde i_1 este indicele pentru care valoarea lui $z_i(x)$ este maximă.

Dacă există un set de soluții $X_1 \subset X$ care satisface pasul 1, atunci

pasul 2 $$v_2(x^*) = \min_{x \in X_1} \max_{i \in I,\, i \notin I_1} \{z_i(x)\}$$

și atunci $I_2=\{i_1, i_2\}$ unde i_2 este indicele pentru care valoarea lui $z_i(x)$ în acest pas este maximă.

. . . . . .

Dacă exista un set de soluții $X_{r-1}\subset X$ care satisface pasul $r-1$, atunci

pasul r $$v_r(x^*)=\min_{x\in X_{r-1}} \max_{i\in I,\, i\notin I_{r-1}} \{z_i(x)\}$$

și atunci $I_r=\{I_{r-1}, i_r\}$ unde i_r este indicele pentru care valoarea lui $z_i(x)$ în pasul r este maximă.

. . . . . .

Dacă există un set de soluții $X_{k-1}\subset X$ care satisface pasul $k-1$, atunci

pasul k $$v_k(x^*)=\min_{x\in X_{k-1}} z_i(x) \text{ pentru } i\in I \text{ și } i\notin I_{k-1},$$

unde $v_1(x^*),\ldots,v_k(x^*)$ este mulțimea valorilor optime ale devierilor fracționare ordonate necrescător.

Verbal, acest optim se poate descrie cum urmează. Cunoscînd extremele funcțiilor obiectiv care pot fi obținute rezolvînd problemele de optimizare separat pentru fiecare criteriu, soluția dorită este cea care dă valorile cele mai mici ale incrementelor și decrementelor fracționare ale tuturor funcțiilor obiectiv de la valorile lor extreme.

Optimul definit mai sus dă o soluție. Însă, folosind tehnica minimax se poate influența prioritatea criteriilor. În acest caz elementul i al vectorului $z(x)$ se poate determina din formula

$$z_i(x)=\max\{\alpha_i z_i'(x),\ \alpha_i z_i(x)\} \qquad (8.16)$$

unde α_i este coeficientul de prioritate al criteriului i. Căutînd optimul în sensul minimax pentru diferite valori ale lui α_i se poate ușor obține un set de soluții distribuite care sînt optime în sensul Pareto.

a) **Metode de căutare a optimului**

Se vor discuta pe scurt metodele de căutare a optimului în sensul minimax.

Există numeroase metode pentru căutarea extremelor funcției obiectiv supuse la restricții. Întrebarea care apare este dacă aceste metode pot fi utilizate pentru căutarea optimului în sensul minimax. În multe dintre aceste metode cum ar fi metoda gradientului, metoda aproximației liniare succesive și metoda de cercetare directă funcția obiectiv determină un șir de pași care îmbunătățește gradat soluția. Deoarece principiul minimax de optimalitate are o formă recurentă nu este posibilă aplicarea acestor metode în scopul găsirii optimului conform pașilor arătați precedent. Însă, formula din primul pas poate fi luată ca nouă funcție obiectiv. Astfel, noul obiectiv se poate scrie în forma

$$v(x)=\max_{i\in I}\{z_i(x)\} \qquad (8.17)$$

iar problema de optimizare constă în găsirea lui $x^*\in X$ astfel încît

$$v(x^*)=\min_{x\in X}\max_{i\in I}\{z_i(x)\} \qquad (8.18)$$

Se poate arăta că în multe modele soluția determinată în primul pas al acestui principiu va fi optimă în sensul minimax.

Multe tehnici de optimizare unicriteriale și programe FORTRAN permit utilizarea funcției obiectiv în forma prezentată mai sus. A. Osyczka a adaptat și utilizat următoarele metode.:

1. Metoda de cercetare directă Hooke și Jeeves.
2. Metoda metricii variabile Davidon și Fletcher.
3. Metoda toleranței flexibile.

Pentru primele două metode s-a utilizat metoda funcției de penalitate în scopul rezolvării problemelor cu restricții.

Alte metode pentru căutarea optimului în sensul minimax se bazează pe tehnica Monte-Carlo și algoritmul trade-off (de schimbare). În aceste metode optimul este obținut prin compararea soluțiilor care sînt generate aleator (tehnica Monte-Carlo) sau prin schimbarea funcțiilor obiectiv în restricții (tehnica trade-off).

Deoarece nu există o metodă generală pentru rezolvarea problemelor de optimizare unicriterială, fiecare problemă inginerească se tratează individual.

Aceeași situație apare atunci cînd se consideră problema de căutare a optimului în sensul minimax.

Exemplul 8.1. Se consideră problema de proiectare a grinzii I, formulată astfel: Să se determine dimensiunile grinzii prezentate în fig. 8.3 care satisface restricțiile geometrice și de rezistență, și care este optimă conform următoarelor criterii:

1. Suprafața secțiunii transversale a grinzii.
2. Săgeata statică a grinzii sub acțiunea forței concentrate P în dreptul acesteia.

Ambele criterii trebuie minimizate. Se poate ușor constata că aceste două criterii sînt conflictuale unul altuia, cea mai bună soluție a primei funcții obiectiv dă cea mai proastă soluție pentru cea de a doua funcție obiectiv și invers.

Se consideră că:

1. Efortul unitar admisibil la încovoiere a materialului grinzii

$$\sigma_{ai}=16 \text{ kN/cm}^2$$

2. Modulul de elasticitate a lui Young

$$E=2\times 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

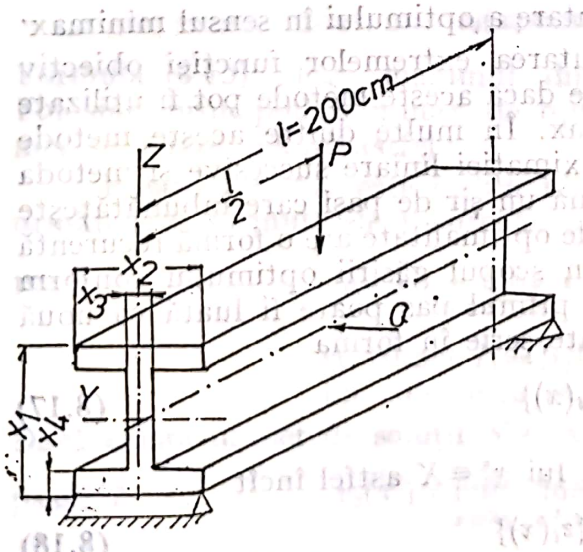


Fig. 8.3

3. Forțele maxime de încovoiere

$$P=600 \text{ kN}, \quad Q=50 \text{ kN}$$

Vectorul variabilelor decizie este $x=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$ unde variabilele sînt date în cm.

Restricțiile geometrice sînt următoarele

$$10\leqslant x_1\leqslant 80, \quad 10\leqslant x_2\leqslant 50,$$
$$0{,}9\leqslant x_3\leqslant 5, \quad 0{,}9\leqslant x_4\leqslant 5.$$

Restricția de rezistență este următoarea:

$$\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}\leqslant\sigma_{ai},$$

unde M_y și M_z sînt respectiv momentele încovoietoare maxime în direcțiile y și z; W_y și W_z sînt modulii de rezistență în direcțiile y respectiv z.

Pentru forțele care acționează ca în fig. 8.3 valorile lui M_y și respectiv M_z sînt 30 000 kN cm și 2 500 kN cm. Modulii de rezistență sînt dați de relațiile:

$$W_y=\frac{x_2x_1^3-(x_2-x_3)(x_1-2x_4)^3}{6x_1}, \qquad W_z=\frac{2x_4x_2^3+(x_1-2x_4)x_3^3}{6x_2}.$$

Funcțiile obiectiv se exprimă astfel:

1. Suprafața secțiunii transversale.

$$f_1(x)=2x_2x_4+x_3(x_1-2x_4) \text{ cm}^2$$

2. Săgeata statică

$$f_2(x)=\frac{Pl^3}{48EI},$$

unde I este momentul de inerție care se calculează din ecuația

$$I=\frac{x_2x_1^3-(x_2-x_3)(x_1-2x_4)^3}{12}.$$

După substituire cea de a doua funcție obiectiv este

$$f_2(x)=\frac{60\,000}{x_2x_1^3-(x_2-x_3)(x_1-2x_4)^3}.$$

Deoarece uzina poate produce numai grinzi I ale căror dimensiuni x_3 și x_4 sînt multipli de 1 cm. avem restricția adițională că pentru o soluție optimă variabilele x_3 și x_4 trebuie să fie întregi.

S-a utilizat metoda de cercetare directă Hooke și Jeeves pentru găsirea extremului fiecărui criteriu separat și metoda Hooke și Jeeves împreună cu metoda „branch and bound" pentru determinarea optimului în sensul minimax.

Utilizînd programul OPTISEP s-au obținut următoarele rezultate:

1. Soluțiile care dau minimul funcțiilor obiectiv pentru fiecare criteriu separat

a) considerînd suprafața secțiunii transversale

$x^{0(1)}=\{60, 8\ ;\ 40,5\ ;\ 0,9\ ;\ 0,93\}^T$, $f_1(x^{0(1)})=128 \text{ cm}^2$, $f_2(x^{0(1)})=0,062$ cm.

b) considerînd săgeata statică

$x^{0(2)}=\{80\ ;\ 50,5\ ;\ 5\}^T$, $f_1(x^{0(2)})=850 \text{ cm}^2$, $f_2(x^{0(2)})=0,0059$ cm.

2. Cea mai bună soluție de compromis

$x^*=\{80\ ;\ 50\ ;\ 1,2\}^T$, $f_1(x^*)=276 \text{ cm}^2$, $f_2(x^*)=0,015$ cm

Soluția x^* a fost acceptată de proiectant și n-a fost necesar să se caute alte soluții optime în sensul Pareto.

8.1.2. Tehnica trade – off și metoda de calcul interactivă

Schema interactivă utilizează numerele trade-off (de schimbare) care se vor defini mai departe. Se consideră următoarea problemă scalară de optimizare

$$\min \beta$$

supusă la restricțiile

$$f(x)-\beta\leqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, m\ ;\ g_i(x)\leqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, r\ ;\ h_i(x)=0,\ i=1, 2, \ldots, s \qquad (8.19)$$

Condițiile Kuhn-Tucker ale acestei probleme se scriu în forma :

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^{r} u_{m+i} \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^{s} v_i \nabla h_i(x) = 0$$

$$1 - \sum_{i=1}^{m} u_i = 0, \quad u_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{8.20}$$

$$u_i(f_i(x) - \beta) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,; \quad u_{m+i} g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

În scopul găsirii numerelor trade-off α_{jk} ce leagă variația lui f_k de variația lui f_j prima dintre aceste ecuații este împărțită la u_j care este considerată strict pozitivă. Aplicînd teorema de senzitivitate se ajunge la formula

$$\alpha_{jk} = -\frac{u_k}{u_j} \tag{8.21}$$

Acest rezultat este foarte util în rezolvarea problemei multicriteriale deoarece el aduce proiectantului o informație adițională despre proprietățile suprafeței minimale. Interpretarea geometrică în spațiul criteriilor constă în aceia că vectorul

$$u^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*\}^T \tag{8.22}$$

ale cărui componente sînt multiplicatorii Kuhn-Tucker corespunzători optimului Pareto x^*, este normal la planul tangent al suprafeței minimale în z^*.

În problemele convexe aceasta înseamnă că multiplicatorii u_i^*, $i = 1, 2, \ldots, m$ se pot considera drept coeficienții de ponderare utilizați în formula scalară (8.3). În cazurile neconvexe, însă, vectorul dat u^* ca și numerele α_{jk} asociate lui pot corespunde la mai mult decît o soluție optimă Pareto.

Problema inițială care este utilizată ca bază în tehnica de calcul interactivă este următoarea :

$$\min_{\beta, x \in \Omega} \beta \quad \text{supusă la restricțiile } b_i \bar{f}_i(x) \leqslant \beta, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{8.23}$$

În acest algoritm se aplică metoda comparațiilor perechi-perechi cuplată cu utilizarea numerelor de schimb (trade-off). Obiectivul este determinarea noilor ponderi b_i', $i = 1, 2, \ldots, m$ pentru problema minimax (8.11) în fiecare pas al iterației. Acestea pot fi obținute ca un vector propriu b' al matricei $[A']$ care este formată de proiectant. Rapoartele b_j'/b_k' care sînt elementele acestei matrici se pot interpreta geometric ca fiind rapoartele laturilor mulțimii dreptunghiulare generată de matricea d_∞ în spațiul criteriilor. Utilizînd comparațiile perechi-perechi ale criteriilor este posibil acum să se calculeze fiecare element a_{jk}' atunci cînd sînt cunoscute numai numerele trade-off (de schimb)

Din relația

$$\Delta f_j(x^*) = \alpha_{jk} \Delta f_k(x^*) \tag{8.24}$$

se obține o estimare pentru variația lui f_j corespunzătoare variației lui f_k în x^*.

Dacă $\Delta f_k(x^*)$ este ales de proiectant, cum este sugerat în această tehnică, elementele lui A' se pot calcula din (8.24) și

$$a_{jk}' = \frac{\dfrac{c}{b_k} + \Delta f_k(x^*)}{\dfrac{c}{b_k} + \Delta f_j(x^*)}, \tag{8.25}$$

unde c este valoarea funcției distanță d_∞ la x^*. Geometric, această expresie simplă dă noi rapoarte între laturile dreptunghiului. Realizînd toate comparațiile perechi-perechi necesare se formează matricea A' și problema valorii proprii corespunzătoare poate fi rezolvată. Mai întîi, trebuie să fie verificată buna condiționare a matricei $[A']$ deoarece pot apare ușor rele condiționări.

Astfel, apare necesar să se corecteze valorile elementelor a'_{jk} de către proiectant pentru îmbunătățirea vitezei de convergență.

Metoda de calcul interactivă este sumarizată astfel:

1. Se aleg ponderile inițiale b_i, $i=1, 2, \ldots, m$ pentru criteriul normalizat $\bar{f}_i$ utilizînd metoda comparațiilor.
2. Se rezolvă problema scalară corespunzătoare (8.23) cu ponderi fixate pentru optimul Pareto x^*.
3. Se calculează z^* și se examinează rezultatul. Dacă el este satisfăcător atunci se oprește, dacă nu este satisfăcător atunci se continuă calculul.
4. Se determină numerele de schimb (trade-off) α_{jk} pentru x^*.
5. Se impun variații admisibile $\Delta f_i(x^*)$ și se calculează elementele a'_{jk} pentru matricea $[A']$ utilizînd relațiile (8.24) și (8.25).
6. Se verifică buna condiționare a matricei $[A']$ și se fac corecțiile necesare ale elementelor ei.
7. Se determină noi ponderi b'_i, $i=1, 2, \ldots, m$ prin obținerea vectorului propriu al matricei $[A']$.
8. Se revine la 2.

Dacă nu sînt introduse cerințe suplimentare în modelul de optimizare este posibil să se genereze mai multe optime Pareto în vecinătatea soluției finale prin variația ponderilor b_i în (8.23).

8.1.4. Aspecte generale

Fiecare dintre cele trei tehnici numerice discutate includ parametri care variază în scopul generării soluțiilor optime Pareto ale problemei multicriteriale. Interpretarea geometrică a acestor parametri ușurează înțelegerea lor și prezintă o bază naturală pentru cercetările interactive. Pentru unele valori ale parametrilor, se poate însă întîmpla că problema cu restricții (8.5) nu are soluție unică. Aceasta se datorește așa numitor puncte optime Pareto slabe, care se definesc în cele ce urmează.

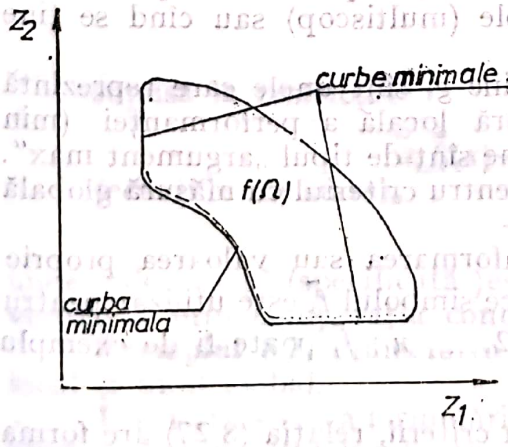


Fig. 8.4 Soluții minime și minime slabe în cazul bicriterial.

Definiție. Vectorul $x^* \in \Omega$ este numit optim Pareto slab pentru problema (8.1) dacă și numai dacă nu există un vector $x \in \Omega$ astfel încît $f_i(x) < f_i(x^*)$ pentru $i=1, 2, \ldots, m$.

Din definiție se trage concluzia că fiecare optim Pareto este deasemeni un optim Pareto slab dar inversa nu este adevărată. Acest concept este ilustrat în fig. 8.4 unde partea conturului domeniului $f(\Omega)$ care este paralelă cu axele de coordonate formează soluții minime slabe în spațiul criteriilor. Toate tehnicile numerice considerate sînt puse în dificultate atunci cînd există soluții optime Pareto slabe. Se face observația că în

Scanned with OKEN Scanner

unele cazuri proiectantul poate fi interesat chiar de soluțiile optime Pareto slabe. Metoda mediei ponderate, care este o tehnică potrivită pentru probleme convexe și metoda minimax, aplicabilă și problemelor neconvexe, fac parte împreună dintr-o familie mai mare de algoritme numite metodele p-norme. Această familie cuprinde toate metodele care pot fi obținute utilizînd funcția distanță d_p indusă de norma l_p

$$\|bf\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} (b_i f_i)^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{8.26}$$

unde matricea diagonală $b = \lceil b_1, b_2, \ldots, b_m \rfloor$, $b_i \geqslant 0$ este folosită pentru a considera parametrii b_i. Astfel, familia d_p definită include metoda mediei ponderate și metoda minimax drept cazuri speciale corespunzătoare respectiv valorilor $p=1$ și $p=\infty$.

8.2 Formulare variațională pentru optimizarea structurală multicriterială

M. Bendsoe, N. Olhoff, J. Taylor au propus o variantă a metodei minimax pentru problema de optimizare multicriterială constînd dintr-o problemă simplă de minimizare a marginii superioare a tuturor criteriilor și astfel se obține o formulare convenabilă pentru analiza problemelor cu obiective locale și globale. În fapt formularea este o extindere a tehnicii interactive.

Se consideră că criteriile separate g_i ale mulțimii $\{g_i\}$ sînt condiționat legate de minimizarea fiecăruia dintre ele. Atunci, problema (vectorială) multicriterială se scrie în forma

$$\min_x [\max_i (a_i g_i)]$$

supusă la : (ecuațiile de stare)$_\alpha$

$$x_{\min} - x \leqslant 0, \quad \int_\Omega x \, d\Omega - V \leqslant 0 \tag{8.27}$$

unde x este variabila de proiectare mărginită inferior de valoarea specificată $x_{\min}$ iar V este valoarea marginii superioare a resursei. $a_i \geqslant 0$ indică ponderile sau coeficienții de utilitate. Indicele α ce reprezintă „ecuațiile de stare" este inclus în scopul acordării cazurilor cînd restricțiile reflectă răspunsul independent al stărilor care pot apare pentru încărcări multiple (multiscop) sau cînd se ține cont de diferite moduri ale răspunsului.

Dezvoltarea este astfel încît printre criteriile g_i sînt unele care reprezintă un max pe domeniul structurii pentru o măsură locală a performanței (min efortului unitar sau deplasării). Astfel de probleme sînt de tipul „argument max". Pentru claritate se introduc simboluri distincte pentru criteriul cu măsură globală și pentru cele asociate cu „argument max".

Astfel, obiectivele globale cum ar fi conformarea sau valoarea proprie sînt reprezentate prin f_i ; $i=1, 2, \ldots, m$, în timp ce simbolul $\tilde{f}_j$ este utilizat pentru a nota argumentul în criteriul $\max_{x \in \Omega} \tilde{f}_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, n$; $\tilde{f}_j$ poate fi de exemplu măsura efortului unitar sau deplasării.

Folosind noua notație în locul lui g_i pentru criterii, relația (8.27) are forma

$$\min_x [\max_{i,j} \{a_i f_i ; \tilde{a}_j \max_{x \in \Omega} \tilde{f}_j(x)\}]. \tag{8.28}$$

Partea max-max a acestei relații se condensează simplu într-un max, iar (8.28) se rescrie

$$\min_{x}[\max_{i,(x)_j}\{a_i f_i\,;\ \tilde{a}_j\tilde{f}_j(x)\}] \tag{8.29}$$

Notația $(x)_j$ arată că pentru criteriul $\tilde{a}_j\tilde{f}_j$ max este pentru $x\in\Omega$.

Problema de minimizare a argumentului din relația (8.29) este echivalentă cu forma unei probleme simple de min (minimizarea marginii superioare β a tuturor criteriilor separate) :

$$\min_{x}\ \beta$$

supusă la restricțiile : $a_i f_i-\beta\leqslant 0,\ i=1,\ldots,m$

$$\tilde{a}_j\tilde{f}_j(x)-\beta\leqslant 0\,;\ x\in\Omega,\ j=1,\ldots,n \tag{8.30}$$

(ecuațiile de stare)$_\alpha$

$$-x+x_{\min}\leqslant 0,\ \int_\Omega x\,d\Omega-W\leqslant 0.$$

Se formează și se operează asupra Lagrangianului asociat problemei (8.30)

Dacă criteriul f_i (sau $-f_i$) poate fi exprimat ca un maxim în raport cu starea, ecuația de stare din (8.30) corespunzătoare la f_i se poate neglija atunci cînd f_i este înlocuit de funcționala pentru care f_i este un extrem (valoarea proprie înlocuită de raportul Rayleigh) : ecuația de stare va fi automat condiția staționarității Lagrangianului în raport cu starea.

Condițiile necesare obținute din (8.30) împreună cu condițiile Kuhn-Tucker formează ecuațiile de bază pentru rezolvarea problemei multicriteriale.

Forma (8.30) este convenabilă din punct de vedere al existenței soluțiilor. Se demonstrează că pentru un spațiu de proiectare închis G și funcționale f_i, f_j continue și convexe în variabilele de stare și de proiectare, se garantează existența soluțiilor problemei (8.30). De asemeni, urmează din formularea min-max că problema minimizării maximului componentelor $a_i f_i\,;\ \tilde{a}_j\tilde{f}_j(x)$ cu restricție asupra resursei este echivalentă cu minimizarea resursei supusă la restricții separate asupra criteriilor. Formularea echivalentă are forma :

$$\min_{x}\int_\Omega x\,d\Omega$$

supusă la restricțiile : $a_i f_i-\beta^*\leqslant 0,\ i=1,2,\ldots,m$

$$\tilde{a}_j\tilde{f}_j(x)-\beta^*\leqslant 0,\ x\in\Omega,\ j=1,\ldots,n \tag{8.31}$$

(ecuațiile de stare)$_\alpha$

$$-x+x_{\min}\leqslant 0$$

unde valoarea β^* (specificată)este soluția problemei (8.30). Echivalența poate fi verificată prin comparația condițiilor necesare ale celor două probleme.

Exemplul 8.2. Proiectarea unei grinzi simplu rezemate pentru un obiectiv local și unul global.

Pentru ilustrarea formulării prezentate se vor trata doi indici de performanță, unul global și altul local cum ar fi conformarea și deplasarea maximă (două criterii).

Grinda este acționată de încărcarea p repartizată liniar pe lungimea l a grinzii, deplasarea grinzii este y iar suprafața secțiunii transversale A a grinzii

Scanned with OKEN Scanner

este variabila de proiectare. Pentru simplificare, rigiditatea grinzii este egală cu A iar grinda este simplu rezemată la $x=0$ și articulată la $x=1$. Problema se formulează astfel

$$\min_{A} \max \left\{ a \max_{x} |y(x)| \; ; \; b \int_0^l p y dx \right\},$$

supusă la restricțiile : $$(Ay'')''=p, \tag{8.32}$$

$$\int_0^l A dx \leqslant V, \qquad 0 < A_{\min} \leqslant A,$$

unde a și b sînt coeficienți de ponderare asupra criteriilor iar V este marginea superioară impusă a volumului. Se observă că criteriul scalar de optimizat se rescrie astfel

$$\max_{x} \left\{ b \int_0^l p y d\Omega \; ; \; a y(x) \; ; \; -a y(x) \right\}. \tag{8.33}$$

Reformularea problemei minmax ca problemă de min este

$$\min_{A(x)} \beta$$

supusă la restricțiile :

$$b \int_0^l p y dx - \beta \leqslant 0, \; a y(x) - \beta \leqslant 0, \; -a y(x) - \beta \leqslant 0, \tag{8.34}$$

$$(Ay'')''=p, \; A_{\min} - A \leqslant 0, \; \int_0^l A dx - V \leqslant 0.$$

Cu multiplicatorii Lagrange η_1, η_2, η_3, $\bar{y}$, γ, și λ, funcționala mărită are forma

$$L=\beta+\int_0^l [\eta_2(ay-\beta)+\eta_3(-ay-\beta)-\bar{y}((Dy'')''-p)+\gamma(A_{\min}-A)]dx+$$
$$+\eta_1\left[b\int_0^l p y dx-\beta\right]+\lambda\left[\int_0^l A dx-V\right] \tag{8.35}$$

Condițiile de staționaritate pentru L sînt :

$$1-\eta_1-\int_0^l(\eta_2+\eta_3)dx=0, \tag{8.36}$$

$$a\eta_2-a\eta_1+\eta_1 bp=(A\bar{y}'')'', \tag{8.37}$$

$$-y''\bar{y}''-\gamma+\lambda=0, \tag{8.38}$$

cu condițiile asociate Kuhn-Tucker.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru problemă pe de altă parte se cunoaște că $y \geqslant 0$, încît $\eta_3 = 0$, și cum este uzual pentru problemele ce implică deplasarea maximă ca indice de performanță, multiplicatorul η_2 este funcția δ-Dirac, sau zero peste tot. Cum y are un maximum local de-a lungul grinzii, $\bar{y}$ este deplasarea adjunctă ce corespunde încărcării uniform distribuite $\eta_1 bp$ și unei încărcări concentrate de mărime $a(1-\eta_1)$ în punctul x_0 oarecare de-a lungul grinzii ; aceasta rezultă din ecuațiile (8.36) și (8.37).

Cu $p = p_0 \frac{x}{l}$ ecuația de stare și ecuația adjunctă (8.37) dau

$$A\bar{y}'' = F(x) = \frac{p_0 l^2}{6}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{8.39}$$

$$A\bar{y}'' = G(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta_1 b p_0 l^2}{6}\left(\dfrac{x}{l}\right)^3 + \left[a(1-\eta_1)(x_0 - l) - \dfrac{\eta_1 b p_0 l^2}{6}\right]\left(\dfrac{x}{l}\right) \\ \qquad \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ \dfrac{\eta_1 b p_0 l^2}{6}\left(\dfrac{x}{l}\right)^3 + \left[a(1-\eta_1)x_0 - \dfrac{\eta_1 b p_0 l^2}{6}\right]\left(\dfrac{x}{l}\right) - a(1-\eta_1)x_0 \\ \qquad \text{pentru } x_0 \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{8.40}$$

Soluția optimă se obține utilizînd relația (8.38) și ea este

$$A(x) = \begin{cases} A_{\min} & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad x_2 \leqslant x \leqslant l \\ \sqrt{FG/\lambda} & x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \end{cases} \tag{8.41}$$

unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației $F(x_i)\, G(x_i) = \lambda A_{\min}^2$, $i = 1, 2$. Multiplicatorul λ rezultă din condiția ca restricția de volum să fie activă, iar η_1, η_2, x_0 sînt date de

$$(\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 = 1) \text{ sau } (\eta_1 = 1 \wedge \eta_2 = 0) \text{ sau}$$

$$\int_0^l bpy\,dx = ay(x_0) \wedge \eta_1 + \eta_2 = 1 \tag{8.42}$$

$$y(x_0) = \max_x y(x) \tag{8.43}$$

Fig. 8.5 reprezintă funcția optimă a suprafeței transversale a grinzii, pentru ponderile $a = 3$, $b = 1{,}5$, lungime $l = 1$, încărcare $p = 6x$ și restricțiile $A_{\min} = 0{,}27$ și $V = 0{,}356$. Valoarea optimă a criteriului este 0,29 și această valoare este obținută pentru media ponderată a deplasării maxime și a conformării. Pentru o grindă de secțiune uniformă de același volum valoarea indicelui de performanță este 0,33.

Exemplul 8.3. Proiectarea unei grinzi cu zăbrele simple cu două criterii. Proiectarea unei grinzi cu zăbrele simple alcătuită din două bare elastice, pentru două criterii evidențiază unele proprietăți interesante ale optimizării multicriteriale a structurilor discrete. Criteriul este măsura ponderată a deplasării în două direcții. Suprafețele secțiunilor transversale A_i sînt variabilele de proiectare. Pentru componentele $\{P_1, P_2\}$ ale încărcării și $\{u_1, u_2\}$ ale deplasării, problema se formulează astfel

$$\min_{A_i} [\max |a_k u_k|]$$

supusă la restricțiile : $P_k - \sum_i K_{kj} u_j = 0,\ k, j = 1, 2$

$$A_{\min} - A_i \leqslant 0,\ \sum_j l_i A_i - V \leqslant 0,\ i = 1,2, \tag{8.44}$$

Indicele i semnifică barele, l_i lungimile barelor iar direcțiile barelor sînt date de θ_i ca în fig. 8.6. Matricea de rigiditate $[K]$ este

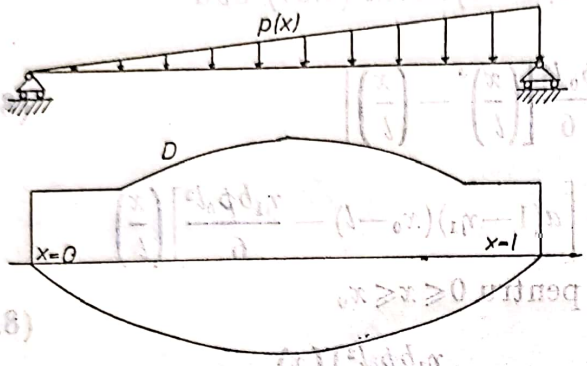


Fig. 8.5

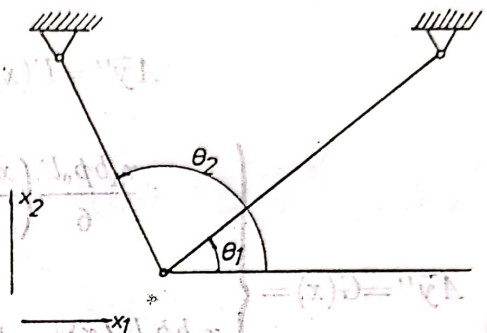


Fig. 8.6

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum_i s_i \cos^2 \theta_i & \sum_i s_i \sin \theta_i \cos \theta_i \\ \sum_i s_i \sin \theta_i \cos \theta_i & \sum_i s_i \sin^2 \theta_i \end{bmatrix} \tag{8.45}$$

unde $s_i = A_i E / l_i$ sînt rigiditățile elementelor. Problema minmax este rezolvată în forma problemei min :

$$\min_{A_i} \beta$$

supusă la restricțiile :

$$a_k u_k - \beta \leqslant 0,\ -(a_k u_k) - \beta \leqslant 0.,$$

$$P_k - \sum_j K_{kj} u_j = 0,\ A_{min} - A \leqslant 0,\ \sum_i l_i A_i - V \leqslant 0. \tag{8.46}$$

Lagrangianul asociat problemei este dat de

$$L = \beta + \sum_k \bar{u}_k (P_k - \sum_j K_{kj} u_j) + \sum_i \mu_i (A_{min} - A) + \sum_k \{\eta_k (a_k u_k - \beta) + \nu_k [-(a_k u_k) - \beta]\} + \lambda (\sum_i A_i l_i - V). \tag{8.47}$$

Condițiile necesare corespunzătoare sînt

$$1 - \Sigma(\eta_k + \nu_k) = 0, \tag{8.48}$$

$$-\sum_j K_{kj} \bar{u}_j + a_k (\eta_k - \nu_k) = 0, \tag{8.49}$$

$$-\sum_k \frac{\partial K_{kj}}{\partial A_i} \bar{u}_k u_j - \mu_i + \lambda = 0, \tag{8.50}$$

plus ecuațiile inițiale de echilibru, restricțiile variabilelor de proiectare, ca și „ecuațiile de comutare". Ecuația (8.48) întărește rezultatul că cel puțin una dintre restricțiile de deplasare este atașată pentru soluționare.

Multiplicatorii (η_k, ν_k) restricțiilor de deplasare apar ca încărcări în ecuația (adjunctă) (8.41). Soluția senzitivității dată de primul termen al ecuației (8.51) este exprimată ca fiind *energia unitară reciprocă* — reciprocă între deplasările inițiale și adjuncte. Cu valori specificate penru. V, a_k și A_{min}, și utilizînd condițiile Kuhn-Tucker pentru multiplicatori, se poate determina soluția optimală.

Se examinează două cazuri particulare, cu datele simplificate : $a_i=1$, $l_i=l$, $P_i=P$ și $A_{min}=0$. Pentru valorile $\theta_1=\pi/2$, $\theta_2=\pi$ soluția ușor de determinat este $\eta_1^*=\nu_2^*=1/2$, $\eta_2^*=\nu_1^*=0$, $\overline{u}_1^*=\overline{u}_2^*$, $A_1^*=A_2^*=V/l$ și $u_1^*=-u_2^*=2Pl^2/VE$.

Se observă în cazul acestui exemplu că fiecare soluție admisibilă este un optim Pareto, deci începînd calculul cu orice soluție nu este posibil să se îmbunătățească un criteriu fără să nu se renunțe la celălalt. Aceasta apare mai evident pentru problema generală $a_1\neq a_2$; $P_1\neq P_2$.

În al doilea exemplu, θ_i are valorile $\theta_1=\pi/4$, $\theta_2=3\pi/4$. Ecuațiile dau $K_{12}^*=0$, $A_1^*=A_2^*=V/2l$, $u_1^*=-u_2^*=2Pl^2/EV$. Aici, condiția $K_{12}^*=0$ arată că grinda cu zăbrele optimală este cea pentru care direcțiile principale coincid cu direcțiile încărcării. Pentru această problemă există numai o soluție optimă Pareto. Se apreciază însă că în general problema de proiectare multicriterială poate avea între o soluție optimă Pareto și o infinitate de soluții.

8.3 Studiu comparativ al metodelor de tratare a problemelor multicriteriale

Amintim că o soluție admisibilă este reprezentată prin vectorul $\{x\} : \{x_1, x_2,...,x_n\} \in R^n$ supus la restricțiile (dependența de stare este implicită în aceste expresii)

$$g_j(x)\leqslant 0,\ j=1, 2,...,k \tag{8.2}$$

Criteriul vectorial de minimizat se exprimă prin

$$f(x)=\{f_1(x), f_2(x),...,f_m(x)\} \tag{8.1}$$

O soluție optimă Pareto x^* este o soluție printre soluțiile admisibile x ce satisfac

$$f(x)\leqslant f(x^*) \quad x=x^* \tag{8.51}$$

Aici $\leqslant$ este o ordine parțială în R^m consecință a ordinii totale a lui R. Valorile criteriului exprimate prin vectorul f nu pot fi comparabile utilizînd ordinea $\leqslant$. Criteriul pentru optimul Pareto implică că $f(x^*)$ este minimă printre acele valori ale criteriului pentru care o comparație utilizînd $\leqslant$ este posibilă. Consecința este că acea soluție care dă de o valoare a criteriului ce nu poate fi comparată cu oricare altă valoare este optimală. Cum s-a remarcat în exemplul 8.3 al grinzii cu zăbrele,pentru o problemă cu două criterii conflictuale (variație monotonă cu semn opus) oricare soluție admisibilă este Pareto optimală. Aceasta se reprezintă calitativ în fig. 8.7. Considerînd o soluție în intervalul indicat, la orice variație a soluției rezultă o creștere

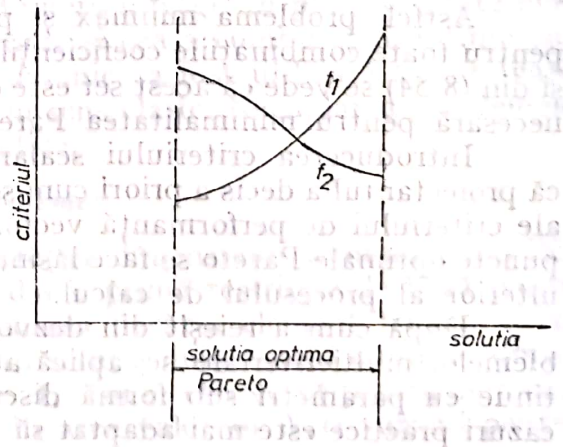


Fig. 8.7

a valorii pentru cel puțin unul dintre criterii f_i. În scopul discutării relației dintre mai multe tehnici de tratare ale problemelor multicriteriale, se reamintește că pentru formularea minimax obiectivul minimizării este scalarul

$$\max_i \{a_i f_i\} \tag{8.52}$$

În altă tehnică, minimizarea este realizată pentru suma ponderată a criteriilor

$$\sum_i b_i f_i \tag{8.53}$$

cu ponderile b_i (pentru discuție, a_i, b_i și f_i sînt nenegative).

Considerînd problema de minimizare se vor compara condițiile necesare pentru minimul local al problemelor ce implică criteriile (8.1), (8.52) sau (8.53) și restricția (8.2). Pentru problema Pareto condiția este

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\eta}_i \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial x} = 0,\ l=1,\ldots,n;\ \tilde{\eta} \leqslant 0,\ \mu_j \geqslant 0,\ \mu_j g_j = 0 \tag{8.54}$$

unde $\tilde{\eta}_i$ și μ_j sînt multiplicatorii Lagrange. Concepînd problema de minimizare a funcționalei (8.52) ca problema de minimizare a marginii β a componentelor $a_i f_i$ se obține condiția necesară pentru problema minimax în forma

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{\partial g_i}{\partial x_l} = 0,\ l=1,\ldots,n;\ \eta_i \geqslant 0,\ \mu_j \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} \eta_i = 1$$
$$\eta_i (a_i f_i - \beta) = 0,\ \mu_j g_j = 0, \tag{8.55}$$

unde η_i și μ_j sînt multiplicatori. În final, pentru suma ponderată (8.53) avem

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial x_l} = 0,\ l=1,\ldots,n;\ \mu_j \geqslant 0,\ \mu_j g_j = 0 \tag{8.56}$$

unde μ_j sînt multiplicatori Lagrange.

Din aceste ecuații se vede că soluția x^* ce satisface condițiile necesare (8.55) pentru problema minimax satisface deasemeni condiția necesară pentru suma ponderată dacă ponderile b_i sînt alese sub forma $\eta_i a_i$ iar valorile celor două criterii (8.52) și (8.53) sînt egale pentru această soluție.

Invers, dacă soluția x^* satisface relația (8.56) ea satisface deasemeni (8.55) cînd ponderile a_i sînt alese $\beta / f_i(x^*)$, $\beta = \Sigma b_i f_i(x^*)$ iar performanțele celor două probleme sînt aceleași (egale cu β).

Astfel, problema minmax și problema mediei ponderate, pot fi rezolvate pentru toate combinațiile coeficienților de utilitate, generînd același set de soluții, și din (8.54) se vede că acest set este exact mulțimea de soluții ce satisface condiția necesară pentru minimalitatea Pareto.

Introducerea criteriului scalar în forma (8.52) sau (8.53) implică faptul că proiectantul a decis a priori cum se repartizează ponderal diferitele componente ale criteriului de performanță vectorial. În contrast, găsirea întregii mulțimi de puncte optimale Pareto se face lăsînd ca această decizie să fie luată într-un stadiu ulterior al procesului de calcul.

După cum a reieșit din dezvoltările făcute formularea variațională a problemelor multicriteriale se aplică atît pentru structurile discrete cît și celor continue cu parametri sub formă discretă sau continuă. Deasemeni pentru multe cazuri practice este mai adaptat să se considere un criteriu scalar bine ales, cum ar fi cel de tipul max prezentat în formularea variațională.

Scanned with OKEN Scanner

F. STANDARDIZAREA ŞI PROIECTEREA OPTIMĂ A STRUCTURILOR

CAPITOLUL 9

Obiectivul proiectării optime a structurilor este specificarea varibilelor de proiectare astfel încît a) să fie admisibilă pentru restricții și b) să minimizeze funcția de performanță. De cele mai multe ori indicele de performanță exprimă volumul, greutatea sau cantitatea de material. Costul este considerat legat funcțional de aceste mărimi. Conform acestei filozofii, proiectarea optimă pare să specifice numai unicate, dimensiuni minime ale unui singur element structural care să satisfacă restricțiile de eforturi unitare, deplasări, etc. Pe de altă parte, producția industrială de elemente structurale și sisteme structurale urmează o cale foarte diferită pentru determinarea soluțiilor optime : cheia acestei căi este standadizarea. În cazul standardizării, o proiectare este optimă atunci cînd toate elementele se grupează în cîteva clase, în care elementele sînt identice. În cele ce urmează se va prezenta după E. Vitiello, situația intermediară : standardizarea este privită ca rezultatul adoptării unei funcții obiectiv (de minimizat) al cărei cost depinde nu numai de cantitatea de material dar și de numărul de elemente identice folosite în proiectarea optimală. Metodele tradiționale ale mecanicii se pot folosi pentru găsirea *dimensiunilor minime* ale elementului, în timp ce metodele cercetării operaționale sînt utilizate la găsirea *combinațiilor* minimale. De fapt, creșterea dimensiunilor minime ale elementului poate conduce la descreșterea costului total, dacă dimensiunile elementelor se grupează mai sistematic. Aici se va considera numai problema combinației optime. Specificarea dimensiunilor minime, ca rezultat al proiectării tradiționale la greutatea minimă se va adopta ca punct de plecare pentru grupare.

Pentru rezolvare se utilizează metoda programării dinamice care a fost folosită inițial pentru problemele clasice de alocare a resurselor. Se pot însă utiliza și algoritmi ai programării matematice în numere întregi. În plus, se poate evita separarea între problema dimensiunilor minime și cea a combinației optime cum s-a sugerat, deoarece metoda programării dinanice a fost utilizată la rezolvarea unor probleme de optimizare a structurilor în sens clasic. Necuplarea problemelor poate însă conveni pentru aplicațiile practice.

Punerea problemei

Metoda utilizată pentru obținerea soluției dimensiunii minime admisibile nu este semnificativă pentru acest studiu, dar o primă restricție de bază pentru validitatea calculului este aceia că dimensiunea fiecărui element trebuie să fie exprimată printr-un singur parametru A_i. În soluția dimensiunii minime admisibile există N_i elemente de aceiași dimensiune A_i. Tot ce este cerut pentru metodele de proiectare la greutatea minimă este specificarea valorilor N_i (i variind pentru toate dimensiunile).

Elementele sînt grupate în clase de *elemente omogene*, în sensul că, dacă se înlocuiește un element avînd dimensiunea A_k printr-un alt element din acelaș

grup avînd dimensiunea A_r, soluția de proiectare este încă admisibilă, cu condiția ca

$$A_r > A_k \tag{9.1}$$

Fără a pierde generalitatea, indicii sînt presupuși a fi aranjați astfel încît, pentru fiecare grup de elemente omogene, aranjate pe q dimensiuni

$$A_1 < A_2 < A_3 \ldots < A_q \tag{9.2}$$

Procedeul operează numai asupra elementelor unui grup omogen.

Costul fiecărui element se consideră a fi funcție de dimensiunile lui și de numărul u_k de elemente identice utilizate în proiect. Cu alte cuvinte, costul C_k al tuturor elementelor de dimensiune A_k este

$$C_k = C_k(u_k) \tag{9.3}$$

Obiectul proiectării optimale este determinarea minimului costului total al tuturor elementelor ce aparțin grupului omogen implicat

$$\min \sum_{i=1}^{q} C_i(u_i) \tag{9.4}$$

cu restricția că soluția este încă admisibilă din punct de vedere structural. Variabilele u_i sînt întregi ; prin urmare, problema poate fi tratată printr-o tehnică de enumerare care implică însă foarte multe calcule. Se definesc acum noile variabile

$$n_k = \sum_{i=1}^{k} u_i, \quad k = 1, 2, \ldots, q \tag{9.5}$$

ce exprimă numărul total de elemente de dimensiuni nu mai mari decît A_k, Funcția obiectiv (9.4) se rescrie

$$\min \sum_{i=1}^{q} C_i(n_i - n_{i-1}) \tag{9.6}$$

Ținînd cont de relația (9.1), restricțiile structurale devin

$$n_k \leqslant \sum_{i=1}^{k} N_i = P_k \tag{9.7}$$

deoarece nici un element de dimensiune A_k nu poate fi folosit pentru a înlocui un element cu dimensiunea minimă cerută A_{k+1}, dar invers este posibil.

Problema exprimată de relațiile (9.6) — (9.7) poate fi rezolvată cu metoda programării dinamice.

În stadiul K se atribuie dimensiuni nu mai mari decît A_k cu n_k elemente. Domeniul variabilelor de stare n_k depinde numai de n_{k-1} și nu de n_{k-2}.

Costul deciziei în stadiul K depinde numai de n_k și de n_{k-1}. Procedeul clasic al programării dinam'ce se utilizează aici, în scopul specificării rolului restricțiilor structurale (inecuația (9.7)).

Pentru o dimensiune arbitrară mai mică decît A_1, variabila de stare este $n_0 = 0$. Pentru orice număr n_1 de elemente din stadiul 1, costul este

$$f_{0,1}(n_1) = C_1(n_1 - n_0) = C_1(n_1), \tag{9.8}$$

$$0 \leqslant n_1 \leqslant P_1 \tag{9.9}$$

Cea mai bună decizie pentru n_1 depinde de n_2 şi este dată de

$$f_{0,2}(n_2) = \min_{n_1} W_1 = \min_{n_1} [f_{0,1}(n_1) + C_2(n_2 - n_1)], \quad 0 \leqslant n_1 \leqslant R_1, \tag{9.10}$$

$$R_1 = \min (n_2, P_1) \tag{9.11}$$

$$0 \leqslant n_2 \leqslant P_2 \tag{9.12}$$

Relaţiile (9.8) — (9.12) conduc la relaţia recursivă

$$f_{0,k}(n_k) = \min_{n_{k-1}} W_{k-1} = \min_{n_{k-1}} [f_{0,k-1}(n_{k-1}) + C_k(n_k - n_{k-1})], \tag{9.13}$$

$$0 \leqslant n_k \leqslant P_k, \quad 0 \leqslant n_{k-1} \leqslant R_{k-1}, \tag{9.14}$$

$$R_{k-1} = \min (n_k, P_{k-1}) \tag{9.15}$$

Soluţia relaţiei recursive (9.13) — (9.15) dă una (sau mai multe) valori optimale n^*_{k-1} funcţii de n_k. În timp ce în stadiul precedent decizia optimală n^*_{k-2} ce corespunde la n^*_{k-1} este cunoscută, se poate obţine (vorbind înapoi) strategia optimală (strategiile)

$$Q_k\{n^*_1, n^*_2, \ldots, n^*_{k-1}, n^*_k\} \tag{9.16}$$

Primele n_k elemente (cele mai mici) sînt distribuite optim în diferite dimensiuni fiecare avînd un număr de elemente dat de

$$u^*_i = n^*_i - n^*_{i-1} \tag{9.17}$$

În ultimul stadiu, toate elementele trebuie să aibă o dimensiune specificată

$$n^*_q = P_q \tag{9.18}$$

rin urmare, $f_{o,g}$ este un singur scalar. Vectorul optimal corespunzător, de tipul prezentat în relaţia (9.16)

$$Q^*_q = \{n^*_1, n^*_2, \ldots, n^*_q\} \tag{9.19}$$

dă distribuţia finală optimă a dimensiunilor elementelor, prin relaţia (9.17).

Asemănător oricărei probleme clasice rezolvate cu metoda programării dinamice şi problema prezentată se reprezintă printr-un graf. De exemplu, fig. 9.1 arată graful corespunzător proiectării optime cu 8 elemente, ale căror dimensiuni sînt $A_1, \ldots, A_4$. Soluţia de greutate minimă este considerată a fi dată de

$$N_1 = 3, \; N_2 = 1, \; N_3 = 2, \; N_4 = 2$$

iar P_i este obţinut din relaţia (9.7).

Programarea dinamică reduce mult calculele în raport cu tehnica enumerării simple. Însă, în cazurile practice numărul de elemente implicate poate fi de ordinul miilor, chiar dacă numărul de dimensiuni posibile este obişnuit mult mai redus. În aceste cazuri, chiar programarea dinamică cere multe calcule. În consecinţă, se va dezvolta un procedeu pentru reducerea numărului de valori posibile ale variabilelor de stare astfel încît acestea să nu fie mai multe decît numărul de dimensiuni posibile ale elementelor.

9.1 Funcţii de cost liniare pe porţiuni

În multe cazuri de producţie industrială a elementelor structurale, costul real de producere şi asamblare a u_k elemente se consideră compus din suma a : a) un cost independent de u_k, dar dependent de costul investiţiei iniţiale a echi-

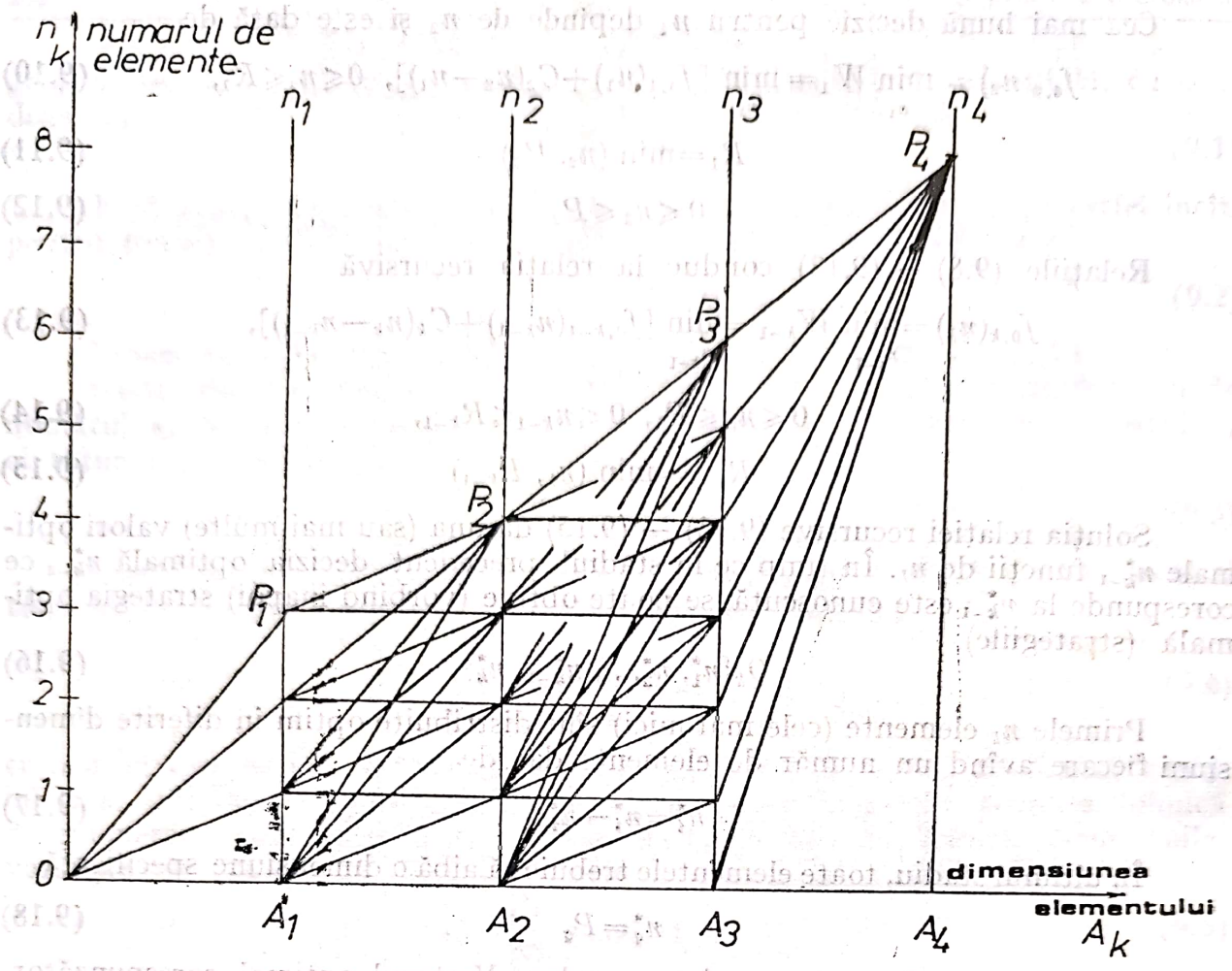


Fig. 9.1

pamentului inițial de producție a unei dimensiuni noi a elementului și de alte costuri fixe și b) un cost proporțional cu n_k (în mare), depinzînd de material, modul de lucru, etc., producerea și asamblarea fiecărui element, deîndată ce costurile inițiale și fixe s-au considerat deja. Prin urmare, funcțiile de cost ce sînt reprezentate în fig. 9.2 pot fi de folosință practică.

În cele ce urmează, se va considera, în concordanță cu relațiile (9.2), că

$$B_1<B_2<B_2<\ldots<B_q, \tag{9.20}$$

$$I_1\leqslant I_2<I_2<\ldots<I_q. \tag{9.21}$$

Se va aplica acum algoritmul prezentat anterior. Relațiile (9.8) și (9.9) conduc la

$$f_{0,1}(0,0)=0 \tag{9.22}$$

$$f_{0,1}(0,1\leqslant n_1\leqslant P_1)=I_1+B_1n_1 \tag{9.23}$$

iar (9.10), (9.11) și (9.12) la

$$f_{0,2}(0,0)=0$$

$$f_{0,2}(0,1\leqslant n_2\leqslant P_1)=\min\,[\{I_2+B_2n_2\},\ \{I_1+B_1n_1+I_2+B_2(n_2-n_1)\},\ \{I_1+B_1n_2\}]=I_1+B_1n_2 \tag{9.24}$$

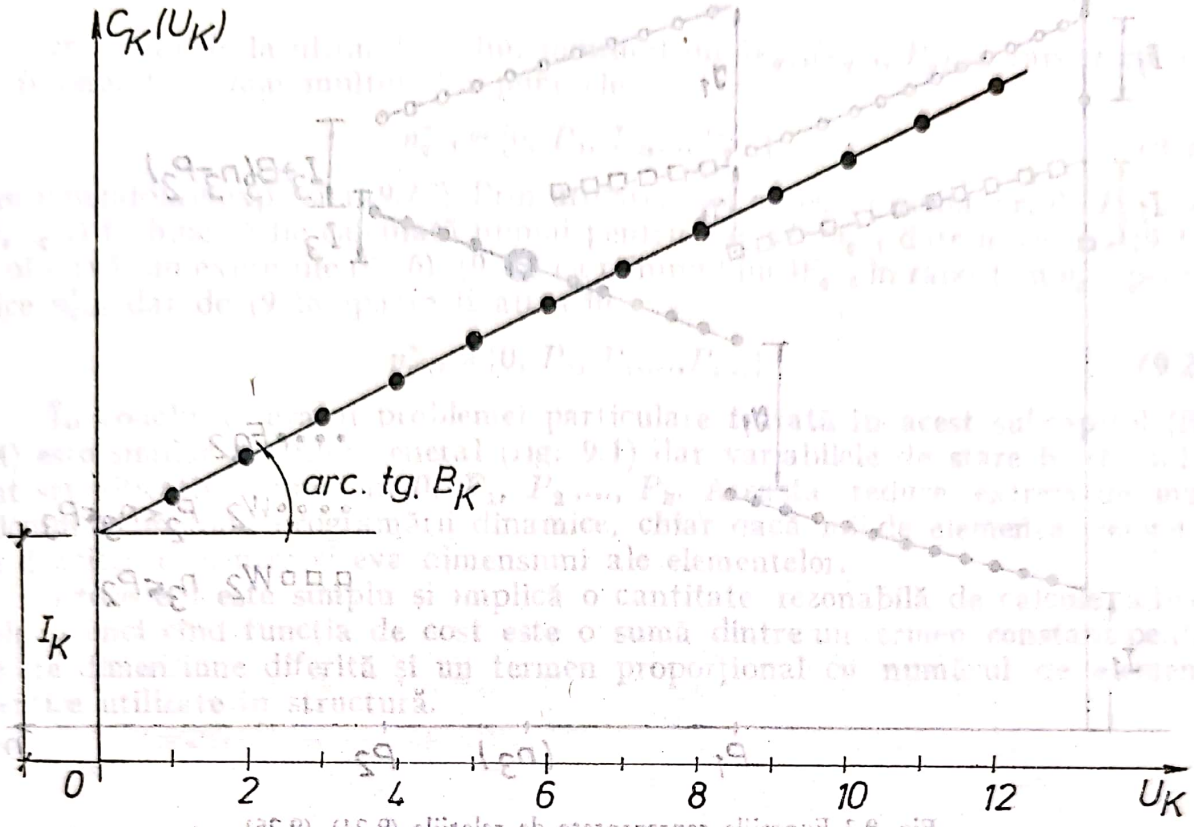


Fig. 9.2 Funcţia de cost liniară pe porţiuni C_k ,unde u_k este numărul de elemente identice avînd dimensiunea A_k.

$$f_{0,2}(0,\ P_1<n_2\leqslant P_2)=I_2+B_2n_2,\ \text{dacă}\ \ P_1>I_1/(B_2-B_1),$$

$$f_{0,2}(0,\ P_1<n_2\leqslant P_2)=I_1+B_1P_1+I_2+B_2(n_2-P_1)\ \ \text{dacă}\ \ P_1\leqslant I_1/(B_2-B_1).$$

Figura 9.3 reprezintă funcția $f_{0,2}\ (0,\ n_2)$. Se observă că aceasta este o funcție liniară pe porțiuni, avînd discontinuități la 0 și P_1.

În pasul următor al algoritmului se calculează

$$f_{0,3}(0,\ n_3)=\min_{n_2} W_2=\min_{n_2}\ [f_{0,2}(n_2)+C_3(n_3-n_2)] \qquad (9.25)$$

Figura 9.3 reprezintă funcția $W_2(n_2,\ n_3)$ în două cazuri : pătrate pentru $n_2\leqslant P_2$ și cercuri pentru $n_3\geqslant P_2$. Apare că, în oricare interval $(1,\ P_1)$, $(P_1+1,\ P_2)$,..., panta lui $W_2(n_n)$ este negativă pentru fiecare valoare a lui n_3.

Din aceasta figură, se poate deduce, ca o concluzie generală, că minimul lui W_k în raport cu n_k este atins pentru una (sau mai multe) dintre următoarele valori ale lui n_k :

$$\{0,\ P_1,\ P_2,...,P_{k-1},\ n_{k+1}\}\ \text{pentru}\ n_{k+1}\leqslant P_k \qquad (9.26)$$

$$\{0,\ P_1,\ P_2,...,P_{k-1},P_k)\ \text{pentru}\ P_{k+1}\geqslant n_{k+1}\geqslant P_k \qquad (9.27)$$

Conform acestei relații se poate construi un graf similar celui din fig. 9.1, dar numai cu acele arce care folosesc problemei particulare studiate.

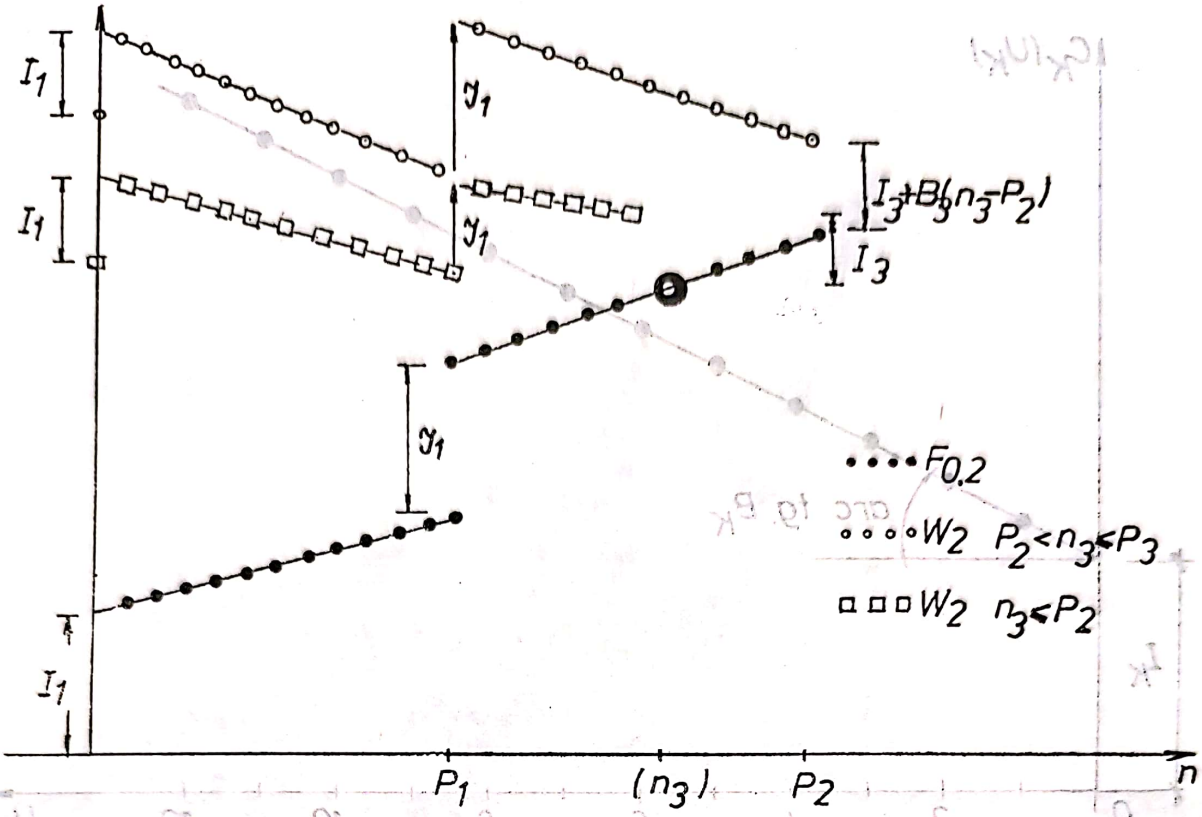


Fig. 9.3 Funcţiile reprezentate de relaţiile (9.24), (9.25).

$$J_i=I_2-I_1+P_1(B_2-B_i) \text{ dacă } P_1\geqslant I_1/(B_2-B_1),$$

$$J_1=I_2 \text{ dacă } P_1\leqslant I_1/(B_2-B_1)$$

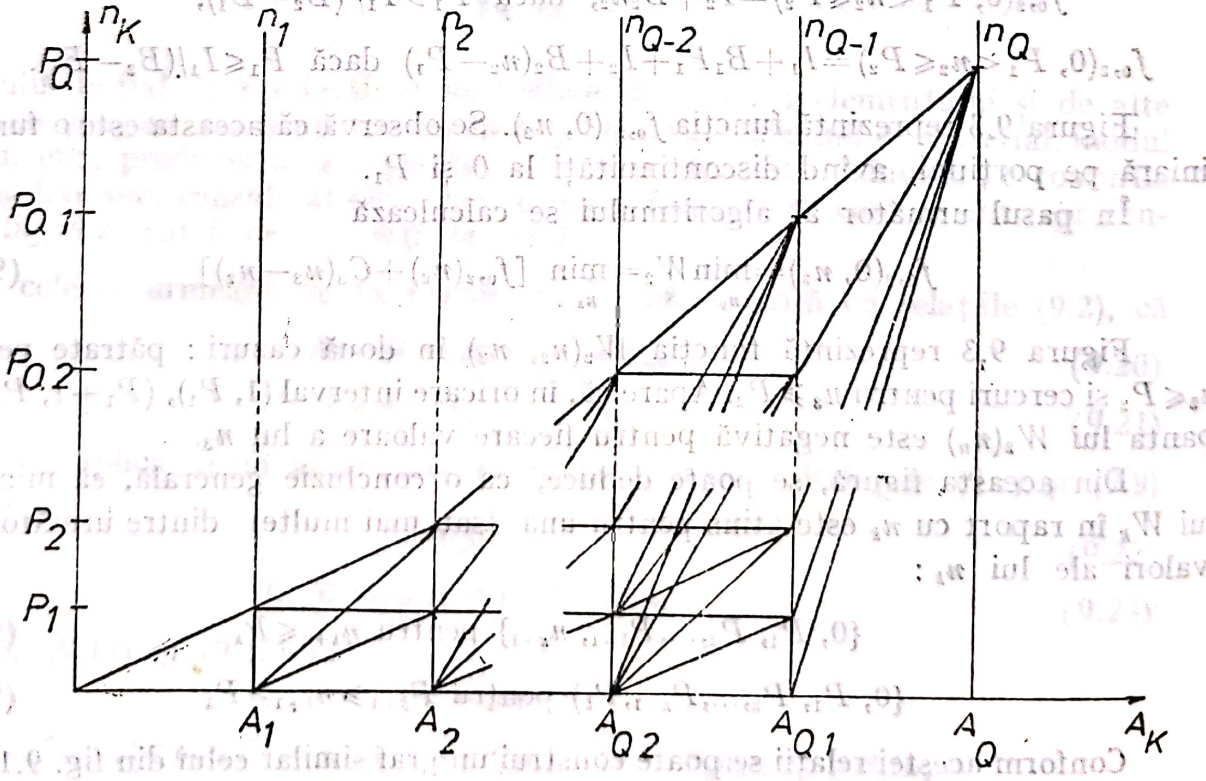


Fig. 9.4

Începînd de la ultimul stadiu, minimul lui $W_{q-1}(n_{q-1}, P_q)$ în raport cu n_{q-1} va fi unul (sau mai multe) din punctele

$$n^*_{q-1} \in \{0, P_1, P_2, \ldots, P_{q-1}\} \tag{9.28}$$

corespunzătoare expresiei (9.27). Prin urmare, sînt necesare numai arcele P_q. Deci, $f(0, n_{q-1})$ trebuie să fie calculată numai pentru valorile n_{q-1} date în relația (9.28). Se observă din expresiile (9.26), (9.27) că minimul lui W_{q-2} în raport cu n_{q-2} pentru orice n^*_{q-1} dat de (9.28)poate fi atins în

$$n^*_{q-2} \in \{0, P_1, P_2, \ldots, P_{q-2}\} \tag{9.29}$$

În concluzie, graful problemei particulare tratată în acest subcapitol (fig. 9.4) este similar grafului general (fig. 9.1) dar variabilele de stare în stadiul K sînt semnificative numai în $0, P_1, P_2, \ldots, P_k$. Aceasta reduce extrem de mult calculul în metoda programării dinamice, chiar dacă mii de elemente trebuie să fie distribuite printre cîteva dimensiuni ale elementelor.

Procedeul este simplu și implică o cantitate rezonabilă de calcule adiționale, atunci cînd funcția de cost este o sumă dintre un termen constant pentru fiecare dimensiune diferită și un termen proporțional cu numărul de elemente identice utilizate în structură.

B I B L I O G R A F I E

1. *A. A. Abarinov, A. D. Zavedenii*, Utocinenie metodichi podbora dvutavrovih secienii izgibaemih elementov, Izv. viss. ucebn. zavedenii Stroit. Arhit., 3, 20—27, 1972.
2. *M. Abdel-Rohman, V. H. Quintana H. H. Leipholz*, Optimal Control of Civil Engineering Structures, Proc. ASCE, Journ. Engng. Mech. Div., 106, EM1, 57—73, 1880.
3. *N. I. Abramov*, Primenenie vicislitelnih masin pri optimalnom proektirovanii jelezobetonnih ramih sistem, Sbornik trudov Leningr. Injen. Stroit. Instit., 49, 1966.
4. *R. Agent*, Construcții din beton armat, Institutul Construcții București, 1975.
5. *Ia. M. Aizenberg*, Construcții cu structura autoadaptabilă la solicitări seismice, Ed. Tehnică, București 1982.
6. *G. Alleto, M. Papia, G. Russo, G. Zingone*, Ottimizzazione structurale in fase dinamica di sistemi intelaiati in c.a. irrigiditi da controventi reticolari, Bul. Inst. Polit Iași, t. XXVII(XXXI), f. 3—4, s. 3, Construcții 13—20, 1981.
7. *J. S. Arora*, Survey of Structural Rean a lysis Techniques, Proc. ASCE, Journ Struct. Div., vol. 102, ST 4, 783—802, 1976.
8. *J. S. Arora, D. F. Haskell, A. K. Govil*, Optimal Design gf Large Structures for Damage Tolerance, AIAA Journal, vol. 18, no. 5, 563—570 1980.
9. *J. S. Arora, E. J. Haug* Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization, AIAA Journal, vol. 17, no. 9 970—974, 1979.
10. *J. S. Arora*, Analysis of Optimality Criteria and Gradient Projection Methods for Optimal Structural Design, Computer Methods Applied Mech. Engng., vol 23, 185—213 1980.
11. *J. S. Arora, K. Rim*, Optimal Design of Trusses under Multiple Constraint Conditions. Tehn. Report nr. 3, Dept. Mech. Hydraulics College Engng., Univ. Iowa, oct. 1970.
12. C. Avram Clase de verificare la fisurare pentru elemente de beton, beton armat și beton precomprimat, a VI-a Conferință de betoane, Timișoara, vol. II 393—406, 1972.
13. *A. K. Azad*, Continuous Steel I — Girders: Optimum Proportioning, Proc. ASCE, Journ. Struct. Div., vol. 106, ST 7, 1543—1555 ,1980.
14. *C. Avram, D. Anastasescu*, Structuri spațiale, Ed. Academiei R.S.R., București, 1978.
15. *J. Bauer, W. Gutkowski, Z. Iwanow*, A Discrete Method for Lattice Structures Optimization, Engineering Optimization, vol. 5, 121—128, 1981.
16. *N. V. Baniciuc*, Optimizația form uprughih tel, Nauka, Moskva 1980.
17. *R. Baus, A. Brenneisen*, Portée economique des poutres précontraintes vérifiées des conditions de classes I et II, Ann. de l'Inst. Tech. Bâtiment Travaux Publiques, no. 255—256, 468—474, mars 1969.
18. *N. W. Bellamy, M. J. West*, Methods of Profile Optimization by Iterative Analysis of Computation, Computer Journ., vol. 12, no. 2, 132—138, 1969.
19. *R. Bellman*, A New Type of Approximation Leading to Reduction of Dimensionality in Control Processes, Journ. Math. Anal. Appl., vol. 29, nr. 2 454—460, 1969.
20. *Bendsoe M., Olhoff N., Taylor J.*, A Variational Formulation, for Multicriteria Structural Optimization, Techn. Univ. Denmark, Report no. 258, march 1983.
21. *G. I. Berdicevschi, N. A. Marcarov, S. P. Pavlov*, Ob optimalnov i predelnom objatii betona v predvaritelno napriajennih konstructiah, Beton i jelezobeton, no. 4. 10—13, 1966.
22. *M. A. Bhatti*, Optimal Desing of Localized Nonlinear Systems with Dual Performance Criteria under Earthquake Excitations, Report no. UCB/EERC-79/15. Earthquake Engineering Research Center, Univ. California, Berkeley, july 1979.

Scanned with OKEN Scanner

23. *M. A. Bhatti, K. S. Pister, E. Polak,* Optimal Design of an Earthquake Isolation System, Report no. UCB/EERC-78/22, Earthquake Engng. Res. Center, Univ. Calif. Berkeley, oct. 1978.
24. *M. A. Bhatti, K. S. Pister, E Polak,* Package for Optimization—Based Interactive CAD, Proc. ASCE, Journ. Struct. Div., vol. 107, ST 11, 2271—2284, nov. 1981.
25. *S. S. Bhavikatti, C. V. Ramakrishnan,* Computational Efficiency of Improved Move Limit Method of Sequential Linear Programming for Structural Optimization, Computers Structures, vol. 11, 191—196, 1980.
26. *M. Bilge.* Sur l'étude de la forme des sections des poutres précontraintes à fils adhérents, Ann. L'Institut Techn. Bâtiment Travaux Publics no. 194, 257—274, février 1964.
27. *Blachut, A. Gajewski,* A Unified Approach to Optimal Design of Columns, SM Archives, vol. 5, no. 4, 363—413, nov. 1980.
28. *I. S. Bliumberg,* Optimizația izghibaemih elementov na osnove staticeskogo opisania ih rabotî, Stroit. Mehan. i Rascet. Sooruj., no. 3, 20—25, 1969.
29. *V. G. Boltianski,* Matematiceschie metodi optimalnogo upravlenia, Izd. Nauka, Moskva, izd. II, 1969.
30. *A. A. Borisevici,* Rascet optimalnih izghibaemîh sterjnevîh sistem kak zadacia matematiceskogo programmirovanie, V sb. 26, Naucinotehn. Conferențiia Belorus. Politehn. Instituta Material. Sekții Stroit. Mehan., 49—55, 1970.
31. *C. Borri, P. Spinelli,* On Design Problems of Grid Shells, Meccanica, 90—96, 1979.
32. *R. Calzona,* Un metodo per il progetto delle sezioni monolitiche in cemento armato precompresso, Giornale del Genio Civile, vol. 106, no. 5—6, 276—294, 1968.
33. *M. Camer,* Beitrag zur Wirtschaftlichen Querschnittsgestaltung im Stahl Beton und Spannbetonbau und zur Benessung von Spannbetonquerschnitten, Dissertation Technischen Universität Berlin, 1960.
34. *C. Capatu V. F. Poteraşu,* Asupra optimizării structurilor de poduri, Conf. jubiliară a Facultății de Construcții, Inst. Polit. Iași, sec. D, 320—324, 1981.
35. *D. Căpățînă,* Calculatorul în ajutorul proiectării construcțiilor, Ed. Tehnică, București, 1976.
36. *D. Căpățînă,* Utilizarea calculatoarelor electronice în proiectare, Revista Construcții, no. 2, 1975.
37. *D. Căpățînă, Gh. Cristea, A. Daraban, A. Daringă,* Automatizarea dimensionării elementelor și a structurilor de beton armat și precomprimat, condiție necesară optimizării proiectării lor, Rev. Construcții, no. 12, 15—20, 1972.
38. *D. G. Carmichael, D. H. Clyde,* A Basis for the Use of Control Systems Theory in the Mathematical Modelling of Structures, V-th Australian Conf. Mech. Struct. Materials, Melbourne, 47—62, 1975.
39. *D. G. Carmichael,* Structural Modelling and Optimization. A General Methodology for Engineering and Control, Ellis Horwood Limited, 1981.
40. *G. Ceradini, C. C. Gavarini,* Calcolo a rottura e programmazione lineare, Nota I: Fondamenti teorici, Giornale del Genio Civile, vol 106, no. 2, 125—138, 1968.
41. *S. Cervenkov,* Opredeliane na nai-neblagopriatnite secenia pri izcisliavane na dvuskatni predvaritelno napregnati elementi na iaostza ogvascimoment i puknatinoobrazuvane, Stroitelstvo, no. 11 4—6, 1970.
42. *F. Y. Cheng, D. Srifuengfung,* Optimum Structural Design for Simultaneous Multicomponent Static and Dynamic Inputs, Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 13, 353—371, 1978.
43. *H. S. Y. Chan,* Mathematical Programming in Optimal Plastic Design, Intern. Journ. Solids Struct., vol. 4, no. 9, 885—895 1968.
44. *A. P. Cijas, A. A. Ciras,* Predelniie sostoianiia i optimalnoe proektirovanie, Stroit. Mehan. Rascet Sooruj., no. 2, 22—23 1971.
45. *C. Cinquini, G. Sacchi,* Problems of Optimal Design for Elastic and Plastic Structures. Journal de Mecanique Appliquée, vol. 4, no. 1, 31—59, 1980.
46. *R. Cioroiu, F. Dobrescu* Propunerea unei metode de estimare a eficienței economice a investițiilor folosind teoria utilității Rev. Construcții, no. 1, 4—9, 1971.
47. *A. A. Ciras,* Mathematical Models of Analysis and Optimization of Elastic-Plastic Systems, Vilnius, Mokslas, 1982
48. *A. B. Crawford, W. M. Jenkins,* Optimum Design of Some Steel Roof Structures, Structural Engineer, vol. 58A, no. 10, 317—325, oct. 1980.
49. *I. Dancea,* Programarea calculatoarelor numerice pentru rezolvarea problemelor cu caracter tehnic și de cercetare științifică, Ed. Dacia, Cluj, 1973.
50 *I. Dancea,* Metode de optimizare, Ed. Dacia, Cluj 1976.
51. *E. P. Danielov, L. I. Iarin,* Primenenie dinamiceskogo programmirovaniia dlia optimalnogo proektirovaniia tehnika v stroitelstve i proektirovanii, vol. 11, no. 6, 1969.
52. *S. A. Dimitriev* Optimalnoe napriajenie objatia betona predvaritelno napriajen-

Scanned with OKEN Scanner

82. *V. B. Grinev, A. P. Filippov*, Optimizația sterjnei po spectru sobstvennih znacenii, Naukova Dumka, Kiev, 1979.
83. *B. V. Grinev, A. P. Filippov*, Optimizația elementov construcții pe mehaniceschim harakteristikam, Naukova Dumka Kiev, 1975.
84. *I. Guyon*, Constructions en béton précontraint. Classes. Etates limites, tome I—Etude de la section, Eyrolles, Paris, 1976.
85. *I. Guyon*, Béton précontraint. Etude théorique et expérimental, tomes I et II, Eyrolles, Paris, 1958.
86. *R. T. Haftka, B. Prasad*, Programs for Analysis and Resizing of Complex Structures, Computers & Structures, vol. 10, 323—330, 1979.
87. *R. T. Haftka*, B. *Prasad*, Optimum Structural Dcsign with Plate Bending Elements—A Survey, AIAA Journal, vol. 19, no. 4, 517—522, 1981.
88. *G. C. Hart*, Optimum Dcsign of Structures Subjected to Dynamic Loads, Lecture note for „Advanced Structural Dynamics", Inst. Promotion des Sciences de l'Ingenieur, Paris, june 1977.
89. *E. J. Haug*, J. S. Arora, Applied Optimal Design-Mechanical and Structural Systems, John Wiley, 1979
90. *L. A. Hill*, Automated Optimum Cost Buildings Design, Proc. ASCE, Journ. Struct. Div., ST 92, no. 1, 247—264, 1966.
91 *N. C. Huang*, Optimal Design of an Elastic Column on Thin-Walled Cross Section. Trans. ASME, ser. E, Journ. Appl. Mech, vol. 35, no. 2, 285—288, 1968.
92. *N. C. Huang, N. T. Tang*, Minimum Wcight Design of Elastic Sandwich Beams with Deflection Constraints, Journ. Optimiz. Theory Appl., vol. 4, no. 4, 277—298, 1979.
93. *J. Huber*, Cercetări privind optimizarea construcților de beton, Bauwirtschaft (B. W.), vol. 27, no. 43, 2126—2130, 1973, Traducere INID.
94. - - - ICCPDC—IPCT, Proiect 7156 — Revizuit 1977, Grinzi principale transversale pentru hale industriale parter cu deschideri de 12,15 și 18 m. la 6 m interax
95. - - - ICCPDC—IPCT, Proiect 5104 : a— Revizuit 1977, Gnzi principale transversale de 21 m, deschidere din beton precomprimat interax 6 m, 9 m și 12 m.
96. *L. I. Icerman*, Optimal Structural Dcsign for Given Dynamic Deflection, Intern. Journ. Solids Struct., vol. 5, no. 5, 473—491, 1969.
97. *V. D. Ilicev*, Primenenie lineinogo programmirovaniia dlia rasceta optimalnîh parametrov nekotorih dinamiceschih sistem, v Sb. „Primenenie electron. vicis. masin Stroit. Mehan., Naukova Dumka' Kiev, 412—415, 1968.
98. *Vl. Ionescu, L. Lupaș*, Tehnici de calcul în teoria sistemelor, vol. I — Sisteme liniare, vol. II — Sisteme optimale, Ed. Tehnică, 1974.
99. *M. R. Khan, K. D. Willmert, W. A. Thornton*, An Optimality Criterion Method for Large-Scale Structures, AIAA Journal, vol. 17, no. 7, 753—761, 1979.
100. *U. Kirsch*, Optimum Structural Dcsign McGraw-Hill, 1981.
101 *U. Kirsch*, Approximate Structural Reanalysis for Optimization Along a Line, Int. J. Numerical Methods Engineering, vol. 18, 635—651, 1982.
102. *U. Kirsch*, Optimal Design Based on Approximate Scaling, Proc. ASCE, Journ. Struct. Div., no. ST4, 888—909, 1982.
103. *N. S. Khot*, Algorithms Based on Optimality Criteria to Design Minimum Weight Structures, Engineering Optimization, vol. 5, 73—90, 1981.
104. *J. L. Kuester, J. H. Mize*, Optimization Techniques with Fortran, McGraw-Hill, 1975.
105. *I. Kolarov*, Optimalno orazmeriavane na plonstenni gredi, Stroitelstvo (R. P. Bulgaria) vol. 17 no. 11 12—16 1970.
106. *J. Koski* Multicriterion Optimization in Structural Design in „Proc. Int. Symp. Optimum Struct. Design" 10—29—10—36 oct. 1981 Univ. Arizona S.U.A. Pineridge Press Anglia 1982.
107. *C. N. Kostem* Optimizarea configurației structurilor prefabricate, Computers & Structures vol. 4 no. 1 125—132 1973 Traducere INID 1975.
108. *W. Kozlowski Z. Mroz* Optimal Dcsign of Discs Subject to Geometric Constraints, Int. J. Mechan. Sci. vol 12 no. 12 1007—1012 1970.
109. *A. M. Kulebiakin, V. I. Scripnic. Rascet* optimalnoi konstrucții predvaritelno napriajennoi jelezobetonnoi pliti po sterjnevoi armaturoi, Naucin. Tr. Leningr. Lesteh. Akad. 122 24—27, 1970.
110. *B. O. Kuzmanovic, N. Willems*, Approximate Design by Geometric Series, Proc. ASCE, Journ, Struct. Div., vol. 107, no. ST9, 1976—1774, 1981.
111. *Ed. H. H. E. Leipholz*, Structural Control, North Holland, 1980.
112. *R. Levy, K. Chai*, Implementation of Natural Frequency Analysis and Optimality Criterion Design, Computers Structures, vol. 10, 277—282, 1979.
113. *G. E. Levey, Kuan-Chen Fu*, A Method in Discrete Frame Optimization and Its Outlook, Computers & Structures, vol. 10, 363—368, 1979.
114. *Z. K. Lesniak*, Optimalizacja keztaltuluku jako prezekraju dzwigarow sklepienicwych Mehan. Teor. Stosowana, vol. 6, no. 1 79—91, 1968.

Scanned with OKEN Scanner

149. *A. V. Perelmuter*, O fiziceskoi realizaţii optimalnoi prednapriajennoi sterjnevoi sistemi, Prikladnaia Mehanika, no. 7, 129—132, 1970.

150 *V. Petcu*, Minimum Moment Redistribution Theory of Reinforced Concrete Continuous Structures, Rev. Roum. Sci. Tech. Méc. Appl., vol. 14, no. 4, 759—819, 1969.

151. *V. Petcu*, Minimum Moment Redistribution Theory of Reinforced Concrete Continuous Structures, Indian Concr. Journ., vol. 43, no. 11, 410—418, 1969.

152. *C. Petiau, G. Lecina*, Optimization des structures d'avion, Journ. Méc. Théor. Appliquée, Paris, vol. 1, no. 2, 291—309, 1982.

153 *M. Petrina*, Probleme ale optimizării proiectării structurilor alcătuite din bare, Teză de doctorat, Inst. Politehnic Cluj, Fac. Construcţii 1982.

154. *Ping-Chun Wang*, Metode numerice şi matriceale în mecanica construcţiilor cu aplicaţii la calculatoare (traducere din limba engleză). Ed. Tehnică, Bucureşti, 1970.

155. *Iu. M. Pocitman*, Cu privire la proiectarea optimă a unor elemente de construcţii în care are loc redistribuirea eforturilor (traducere INID), Stroit. Mehan. Rascet Soorujenii, no. 2, 23—25, 1973.

156. *Iu. M. Pocitman, Z. I. Piatigorskii*, Optimalnoe proektirovanie stroitelnih konstrukţii, Visşaia scola, Kiev, 1980.

157. *Iu. M. Pocitman, Z. I.*, Piatigorskii, Rascet i optimalnoe proektirovanie konstrukţii s ucetom prisposobliaemosti, Izd. Nauka, Moskva, 1978.

158. *A. I. Polovinkina*, Algoritmi optimizaţii proektnih reşenii, Energhia, Moskva, 1976.

159. *A. Pop*, Criterii tehnico-economice în proiectarea betonului armat, Teză de doctorat, Inst. Politehnic Timişoara, 1974.

160. *H. Popescu, V. Chiroiu*, Calculul structurilor optimale. Ed. Acad. R.S.R. 1981.

161 *P. Postelnicu*, Cibernetica şi conexiunea inversă. Ed. Ştiinţ. şi Enciclop., Bucureşti, 1981.

162. *V. F. Poteraşu, D. Vieru, G. Muscolino*, Unicitatea identificării matricelor de rigiditate şi amortizare la structurile în cadre acţionate seismic, Studii Cercet. Mecanică Aplicată, tom 41, no. 2, 267—281, 1982.

163. *V. F. Poteraşu, A. Vulpe, G. Neagu, D. Popescu*, Optimizarea ierarhizată a sistemelor dinamice neliniare, Conf. Fac. Hidrotehnică, Inst. Polit. Iaşi, 140—146, 1978.

164. *V. F. Poteraşu*, Extinction in Minimum Time of a Double Layer Framework Vibrations, Bul Inst. Polit. Iaşi, f. 3—4, sec. V. 7—10, 1980.

165. *V. F. Poteraşu*, Extinction in Minimum Time of a Shear Frame Vibrations Induced by an Earthquake, Bul. Inst. Polit. Iaşi, f. 3—4, sec. V. 1981.

166. *V. F. Poteraşu, G. Barbaro, V. Ruisi*, Progettazzione ottimale di structure irrigidite in zona sismica, Bul. Inst. Polit. Iaşi, 1982.

167. *V. F. Poteraşu*, Optimal Control for Extinction in Minimum Time of Spatial Structure Vibrations, al 3-lea Simpozion IFAC: Controlul sistemelor cu parametri distribuiţi, Toulouse, Franţa, 1982.

168. *V. F. Poteraşu, M. Di Paola, G. Muscolino*, Simulation of Flexible Structures with Multiple Modes for a White Noise Input. Simpozionul internaţional: „Simulating in engineering sciences", Nantes, Franţa, mai 1983.

169. *V. F. Poteraşu*, Active Control for Extinction in Minimum Time of a Fluid Coupled Cylinders Vibrations, a 7-a Conferinţă: Structural Mechanics in Reactor Technology, Chicago, U.S.A., august 1983

170. *V. F. Poteraşu*, Probleme de optimizare cu aplicaţii la studiul barelor, plăcilor şi învelişurilor subţiri, Teză de doctorat, Inst. Polit. Iaşi, 1971.

171. *W. Prager*, Optimality Criteria in Structural Design, Proc. National Acad. Sci. U.S.A., vol. 61, no. 3, 794—796, 1968.

172. *W. Prager, J. E. Taylor*, Problems of Optimal Structural Design, Trans. ASME, Journ. Appl. Mech., ser. E, vol. 35, no. 1, 10e—106, 1968.

173. *D. Precupanu*, Forme optime ale profilului dublu T, Bul. Inst. Polit. Iaşi, tom XIX(XXIII), f. 3—4, sec. V, 9—16, 1973.

174. Proceedings of the International Symposium on Optimum Structural Design (Eds. R. H. Gallagher, E. Atrek, A. J. Morris, O. C. Zienkiewicz, N. Perrone. K. M. Ragsdell, J. L. Armand, G. Vanderplaats, D. Shanno), Univ. Arizona Tucson, oct. 1981, Pineridge Press, Anglia, 1982.

175. Proceedings of the Euromech — Colloquium 164 — Optimization Methods in Structural Design (Eds. H. Eschenauer, N. Olhoff), Univ. Siegen, R.F.G., oct. 1982, Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1983.

176. *V. V. Profimovici, V. A. Permiakov*, Optimalnoe proektirovanie metaliceskih konstrukţii, Budivelnik, Kiev, 1981.

177. *M. Radeş*, Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1979.

178. *A. Rajaraman, L. A. Schmit Jr.*, Basis Reduction Concepts in Large Scale Structural Synthesis, Engineering Optimization, vol. 5, 91—94, 1981.

179. *M. Rafiroiu*, Modele de simulare în construcţii, Ed. Facla, Timişoara, 1982.

Scanned with OKEN Scanner

toane, Timişoara, vol. V, 216—235, 1972.
211. *I. Tertea, Tr. Onet, M. Beuran, V. Păcurar*, Proiectarea betonului armat. Tabele, nomograme, prescripţii, Ed. Didact. Pedag., Bucureşti, 1977.
212. *I. Tertea, N. Florea*, Determinarea secţiunilor periculoase în calculul de rezistenţă al grinzilor precomprimate cu profil variabil din beton greu şi uşor. a VII-a Conf. de betoane , Cluj-Napoca, 133—140, oct. 1976.
213. *I. Tertea, N. Florea*, Cercetări privind proiectarea optimă a elementelor încovoiate din beton precomprimat. Simpozionul Structuri economice în construcţii, vol. I, 207—216, Deva, oct. 1979.
214. *I. Tertea*, Betonul precomprimat, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1981.
215. *F. E. Udwadia, D. K. Sharma, P. C. Shah*, Uniqueness of Damping and Stiffness Distributions in the Identification of Soil and Structural Systems, Trans. ASME, Journ. Appl. Mech., ser. E, vol. 45, 181—187, march 1978.
216. *G. Uzunov*, Some Problems of the Application of the Principle of Maximum to Mechanical Problems, National Conf. Theoret. Appl. Mech., Varna, Bulgaria, 1969.
217. *E. I. Varenik*, Bazele analizei tehnico-economice în construcţii (traducere din limba rusă), ESPAC, Bucureşti, 1954.
218. *V. B. Venkayya, N. S. Khot, F. E. Eastep*, Vulnerability Analysis of Optimized Structures, AIAA Journal, vol. 16, no. 11, 1189—1195, 1978.
219. *V. B. Venkayya*, Structural Optimization: A Review and Some Recommendations Int. J. Num. Meth. Engineering, vol. 13, no. 2, 203—229, 1978.
220. *G. H. McVerry*, Structural Identification in the Frequency Domain from Earthquake Records, Earthquake Eng. Struct. Dyn., vol. 8, 161—180, 1980.
221. *D. Vicenţiu*, Programarea neliniară, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1975.
222. *E. Vitiello*, Standardization and Optimum Structural Design by Dynamic Programming, Journ. Optim. Theory Applications, vol. 2, no. 1, 183—191, 1977.
223. *L. Vuc, C. Milici, I. Dimoiu, N. Rachin*, Modele matematice în proiectarea construcţiilor, Ed. Facla, Timişoara, 1981.
224. *A. Vulpe, V. F. Poteraşu, G. Neagu, D. Popescu*, Probleme de optimizare în teoria vibraţiilor, Conf. Fac. Hidrotehnică, Inst. Polit. Iaşi, 129—135, 1978.
225. *L. Watson W. H. Yang*, Methods for Optimal Engineering Design Problems Based on Globally Convergent Methods, Computers & Structures, vol. 13, 115, 119, 1981.
226. *J. P. Wolf, P. A. Maden*, An Assessment of the Application of Active Control to Reduce the Seismic Response of Nuclear Power Plant, Nuclear Engineering and Design, vol. 66, no. 3, 383—397, 1981.
227 *Y. Yokoo, T. Nakmura, M. Keii*, The Minimum Weight Design of Multi-Story Building Frames Based upon the Axial-Force-Bending Moment Interaction Yield Condition, IUTAM Symposium Warsaw/Poland 1973, Ed. A. Sawczuk, Z. Mroz, Optimization in Structural Design, Springer Verlag, 497—517 1975.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

CAPITOLUL 1 (dr. ing. V. F. Poteraşu şi dr. ing. N. Florea)

Introducere, 5

1.1 Proiectarea în sens sistemic, 5
1.2 Obiectul optimizării, 7
1.3 Criterii de optimizare, 9
1.4 Formularea matematică a problemei de optimizare, 10

CAPITOLUL 2 (dr. ing. V. F. Poteraşu)

Algoritmi de optimizare a structurilor, 14

2.1 Metode de reproiectare, 15
2.2 Metodele criteriului de optimalitate, 26
2.3 Procedee generale iterative, 43

A. OPTIMIZAREA STRUCTURILOR ÎN DOMENIUL ELASTIC

CAPITOLUL 3 (dr. ing. V. F. Poteraşu)

Optimizarea structurilor la acţiuni statice, 47

3.1 Proiectarea optimă a structurilor spaţiale în cadre, 47
3.2 Proiectarea optimă a reţelelor de grinzi, 55
3.3 Proiectarea optimă a structurilor din bare articulate plane şi spaţiale, 71

CAPITOLUL 4 (dr. ing. V. F. Poteraşu)

Optimizarea structurilor la acţiuni dinamice, 93

4.1 Optimizarea cadrelor plane simple şi contravîntuite acţionate dinamic fără interacţiune cu fundaţia, 93
4.2 Extincţia în timp minim a vibraţiilor unei structuri spaţiale în dublu strat, 111

B. OPTIMIZAREA GRINZILOR CU INIMA PLINĂ DIN BETON PRECOMPRIMAT

CAPITOLUL 5 (dr. ing. N. Florea)

5.1 Principii de calcul şi alcătuire optimă a elementelor încovoiate din beton precomprimat, 115

Scanned with OKEN Scanner

5.2 Metodologii de optimizare a dimensionării grinzilor precomprimate, 119
5.3. Dimensionarea optimă a grinzilor precomprimate în domeniul elastic, 123
5.4 Dimensionarea optimă a grinzilor precomprimate în faza de cedare, 144
5.5 Concluzii și propuneri de proiectare, 150

C. OPTIMIZAREA STRUCTURILOR CU COMPORTARE DINCOLO DE LIMITA ELASTICĂ

CAPITOLUL 6 (dr. ing. V. F. Poteraşu)

6.1 Proiectarea optimă a reţelelor de grinzi în domeniul plastic, 165
6.2 Proiectarea optimă a cadrelor plane în domeniul plastic, 174

D. CONTROLUL OPTIM ACTIV ŞI IDENTIFICAREA STRUCTURILOR

CAPITOLUL 7 (dr. ing. V. F. Poteraşu)

7.1 Unicitatea identificării matricelor de rigiditate şi amortizare la structurile în cadre acţionate seismic, 195
7.2 Identificarea parametrilor structurilor în domeniul frecvenţei, 204
7.3 Controlul optim activ al structurilor, 215

E. OPTIMIZAREA MULTICRITERIALĂ ÎN PROIECTAREA STRUCTURILOR

CAPITOLUL 8 (dr. ing. V. F. Poteraşu)

8.1 Metode numerice pentru optimizarea multicriterială, 233
8.2 Formulare variaţională pentru optimizarea structurală multicriterială, 242
8.3 Studiu comparativ al metodelor de tratare a problemelor multicriteriale, 247

F. STANDARDIZAREA ŞI PROIECTAREA OPTIMĂ A STRUCTURILOR

CAPITOLUL 9 (dr. ing. V. F. Poteraşu)

9.1 Funcţii de cost liniare pe porţiuni, 249
Bibliografie, 256

Redactor : VICENȚIU DONOSE
Referent științific :
Prof. dr. doc. DUMITRU MANGERON
Tehnoredactor : MIHAI BUJDEI

Apărut 1984. Format 70×100/16. Coli tipo 16,75
Bun de tipar la 18.IV.1984
Editura Junimea, str. Gheorghi Dimitrov nr. 1
IAȘI—ROMÂNIA

Tipărit la Întreprinderea poligrafică Iași
sub comanda nr. 363/1983
str. 7 Noiembrie nr. 49

Scanned with OKEN Scanner